

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

56e jaargang
1980/1981
no. 8
april

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter: Dr. Th. J. Korthagen, Torenlaan 12, 7231 CB Warnsveld, tel. 05750-2 34 17. Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag. Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Kapteynlaan 105, 3571 XN Utrecht. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt *f* 40,— per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. *f* 27,—; contributie zonder Euclides *f* 20,—.

Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 augustus.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij B. Zwaneveld, Haringvlietstraat 9'', 1078 JX Amsterdam, tel. 020-73 89 12. Zij dienen met de machine geschreven te zijn met een marge van 5 cm en een regelafstand van $1\frac{1}{2}$.

Boeken ter recensie aan W. Kleijne, Treverilaan 39, 7312 HB Apeldoorn, tel. 055-55 08 34.

Mededelingen enz. voor de redactie aan Drs. S. A. Muller, Van Lynden van Sandenburglaan 63, 3571 BB Utrecht, tel. 030-71 09 65.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan A. Hanegraaf, Heemskerkstraat 9, 6662 AL Elst, tel. 08819-24 02, girorekening 1039886.

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 37,60. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement *f* 21,90. Niet-leden kunnen zich abonneren bij:

Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 58, 9700 MB Groningen, tel. 050-16 21 89. Giro: 1308949.

Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen.

Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag.

Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.

Losse nummers *f* 6,20 (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties zenden aan:

Intermedia bv, Prinses Margrietlaan 1, Postbus 371, 2404 HA Alphen a/d Rijn. Tel. 01720-6 20 78/6 20 79. Telex 33014.

I.C.M.E. IV – I.G.P.M.E. – Schoolbezoek

'Bezorgdheid en vertrouwen gaan hand in hand'

HARRIE BROEKMAN

Tijdens mijn bezoek aan het vierde internationale kongres over wiskunde-onderwijs, het daarop volgende jaarlijkse kongres van de International Group for the Psychology of Mathematics Education, en enkele scholen in de omgeving van Berkeley, Californië, ben ik gekonfronteerd met een aantal serieuze en gelukkig ook een aantal minder serieuze zaken. Enkele daarvan die te maken hebben met een – voor mij – verontrustende invloed van de computer wil ik hier graag weergeven. Daarnaast wil ik iets vertellen over een poging om een evenwicht te zoeken tussen onderwijzen en opvoeden.

I De invloed van de computer

1 Bij mijn aanmelding voor het ICME-congres had ik gebruik gemaakt van de mogelijkheid om op te geven wie ik als kamergenoot wenste. Achteraf bleek dat er fouten gemaakt waren met de plaatsing en op mijn formulier stond niet Hans Pouw als kamergenoot vermeld maar een onbekende Zweed. Hierover maakte ik mij geen zorgen, want van de leiding ontving ik een briefje dat er fouten waren gemaakt met (door) de computer. Toen wij bij aankomst vroegen om simpelweg de Zweed te plaatsen op de kamer van Hans en Hans bij mij op de kamer werd er zeer verschrikt gereageerd. Hoe haal je het in je hoofd iets te willen veranderen dat door de computer vastgesteld was! De leiding had wel een briefje gestuurd dat er iets mis was, maar dat deed niets af aan het feit dat de computer gezegd had dat ...
Het voorgaande punt heeft niet direkt te maken met onderwijs, maar geeft al wel iets aan van een stuk bezorgdheid dat gedurende mijn verblijf in de V.S. groeide.

2 Vincent Marcelis – een 15-jarige Amerikaanse jongen van Nederlandse afkomst – kwam tot de ontdekking dat op zijn lesrooster het vak toegepaste wiskunde voorkwam i.p.v. handelsrekenen. De leraar handelsrekenen, zowel als de leraar wiskunde en de counselor waren het met hem eens dat dit niet zo opgegeven was. Het was ook niet mogelijk, aangezien hij de voorbereidende wiskundekursus niet gevolgd had.
Misschien begrijpt u het al. De computer had gezegd dat Vincent naar die wiskundeles moest. En dat niet alleen: hij moest daar netjes de lessen bijwonen

en iedere dag zijn huiswerk inleveren. De leraar wiskunde gaf hem een aantal onvoldoendes en op Vincent's vorderingenlijst staat nu dat hij 3 weken die betreffende kursus volgde met zeer slecht resultaat.

3 Een door ons bezochte school in Sacramento beschikte over zeer goede computerfaciliteiten die gebruikt werd voor de leerlingen-administratie. Door inkrimping van het budget was er helaas geen geld meer om deze faciliteiten te benutten voor het onderwijs. Wel was er een wiskundeboek aangeschaft dat sterk gericht was op het werken met een computer.
Gevolg: een zeer sterk op algoritmen gericht onderwijs, waarbij zeer efficiënt geprogrammeerd werd. Alleen ... het waren de leerlingen die geprogrammeerd werden (gedrild, zouden wij zeggen).

Dit op algoritmen gericht zijn kwam niet alleen voor bij een groep zeer zwakke leerlingen, die op 15-jarige leeftijd moesten oplossen $5 \times 4 - 6 \div 3$ volgens een op het bord staande lijst met als titel 'order of operations'. De lerares herhaalde tijdens deze les ook meermalen de zin 'so, do it like our list than we get the good answer!'
Het wordt m.i. griezelig als blijkt dat dit regel is en je het weer ziet bij een groep goede leerlingen van 15 à 16 jaar, die als inleiding op een stuk meetkundig redeneren en bewijzen aan het werk zijn met o.a. de volgende opgave.[1])

All pelicans have enormous beaks
Write (a) 'if-then' form
(b) converse
(c) inverse
(d) contrapositive

Een aardige opdracht, zult u misschien zeggen. Maar is het nog zo leuk als de leerlingen die moeten gaan vertalen in $a \rightarrow b$ en verder zeer formeel moeten werken?[2])

II Onderwijzen en opvoeden

Het taalaspekt
En toch ... juist in de betreffende les genoot ik van de manier waarop de leraar probeerde de leerlingen gevoelig te maken voor de taal. Het misbruik maken van zogenaamde logika in advertentie-slogans kwam daarbij zeer duidelijk naar voren en dit sprak de leerlingen erg aan.
Het hele taalaspekt van de wiskunde kwam trouwens duidelijk naar voren in meerdere door ons bezochte lessen. Het lezen van opgaven en stukjes tekst nam

1 Het gebruikte leerboek was: *Geometry* van Harold R. Jacobs: uitgegeven door Freeman and Company te San Francisco.
2 In 1908 schreef Brandford in zijn boek *A Study of Mathematical Education* het volgende onderwijsprincipe:
'No symbol or contraction should be introduced till the pupil himself so deeply feels the need for such that he is either ready himself to suggest some contraction, or at least appreciate reasonably fully the advantage of it when it is supplied but the teacher.'

een belangrijke plaats in, niet alleen gedwongen door de vele leerlingen met een niet-engelstalige achtergrond maar vooral ook door de speciale manier van omgaan met taal in de wiskundeles.[3])
Een apart probleem daarbij was duidelijk het gebruik van plaatjes-taal. De grafiek als bundeling van van te voren opgespoorde gegevens en/of als een bundeling van gegevens met behulp waarvan je allerlei vragen kunt beantwoorden.
Anders gezegd: 'teken de grafiek' als laatste opdracht van een serie, of als een van de eerste om met behulp daarvan andere vragen te beantwoorden.

Concentratie en lesrooster
Evenals hier in Nederland kampt men in de USA[4]) met het concentratie probleem van veel scholieren. Zowel in het basisonderwijs als in het voortgezet onderwijs kunnen veel leerlingen hun aandacht slechts zeer kort bij hun werk houden. Een van de manieren om daar iets aan te doen is het regelmatig verdelen van vakanties over het jaar. In Sacramento op de Mesa Verde High School had men dit opgelost door het gehele jaar te benutten. Iedere groep leerlingen had 9 weken les, gevolgd door 3 weken vrij. Als gevolg hiervan kon men meer leerlingen herbergen in eenzelfde gebouw (1000 in een gebouw voor 750: op ieder moment zijn 250 leerlingen op vakantie). Een oplossing voor een deel van Pais z'n problemen? Hoe dan ook, leraren én leerlingen waren erg tevreden over dit systeem. Tevens hadden de leraren, zowel als de leerlingen een overzichtelijke periode voor het werk. Uiteraard werd dit niet door iedereen even goed benut, maar de aanzet was er om de leerstof zo in te delen dat de aanvang van de periode benut werd voor een wat soepele introduktie in diverse onderwerpen met een duidelijke afronding aan het eind van de 9-weken periode. Wat hierdoor – als er wat minder gedacht zou worden aan het voortdurend toetsen – vooral bereikt zou kunnen worden is een soort evenwicht tussen het ontwikkelen van een zoekhouding bij de leerlingen én een voldoende beheersing van benodigde algoritmen.[5])

Leren van eigen en andermans fouten
Prof. Avital uit Haifa gaf als zijn mening op het IGPME-congres dat de motivatie van de leerlingen te verhogen is (en de concentratie te verbeteren) door mogelijke fouten én kontrôle momenten vroeg in het leerproces in te bouwen, waardoor de leerling zich verantwoordelijk gaat voelen voor zijn fouten. Daarbij moet wel vermeden worden dat de leerling traumatische ervaringen opdoet. De resultaten van alle leerlingen verbeterden ook toen zij opgaven voorgelegd kregen met de

3 Zie hiervoor het artikel *Talig bezig zijn met wiskunde-onderwijs* van Sieb Kemme in Euclides 54e jrg. nr. 10 (juni 1979) en het artikel *Moedertaal Onderwijs en toch geen Nederlands* van Steven ten Brinke in Euclides 45e jrg. nr. 9.
Aan het Shell Centre for Mathematical Education (University of Nottingham) wordt onderzoek gedaan naar de mogelijkheid om het wiskunde-onderwijs zo in te richten dat de leerlingen een 'basis of believe' hebben voor ze regels gaan leren. In dat kader wordt er onderscheid gemaakt tussen 'imperical proof' (feiten verzamelen) en 'formal logical proof'. Een aardig voorbeeld waaraan dit te zien is, is het bewijs van de stelling dat $n^3 - n$ deelbaar is door 6 voor elke natuurlijke n.

4 Daarbij moeten u en ik wel in de gaten houden dat als ik zeg USA, ik bedoel Californië. En als ik

oplossingen van andere leerlingen. Zij wisten dat een deel van de oplossingen goed was en een deel foutief. De opdracht die ze kregen was 'welke oplossingen zijn goed en welke fout'! De resultaten van de leerlingen die op deze manier aan de opgaven gewerkt hadden was beduidend beter dan de resultaten van een vergelijkbare groep leerlingen, die de opgaven op de gebruikelijke manier zelf gemaakt hadden.

Slotimpressie

Op de scholen die ik bezocht viel mij de grote inzet op van alle wiskundeleraren die ik ontmoette. Een inzet die zich primair richtte op het omgaan met de leerlingen, het onderwijzen, het leiding geven, het uitzoeken van voor hun eigen leerlingen geschikte voorbeelden bij leerstof etc. Het eindeloos diskussiëren over wel of geen koffie-automaat, wel of geen roken toegestaan op het schoolplein, etc. werd zeer bewust vermeden. Beslissingen over dat soort zaken werden maar al te graag gedelegeerd aan de daarvoor aangestelde schoolleiding en administratieve staf.[6])

Kortom: de wiskundeleraren werkten met grote inzet aan de (wiskundige) opvoeding van hun leerlingen.

bedoel Californië, dan bedoel ik eigenlijk Berkeley, San Francisco, Sacramento, San Leandro: ja eigenlijk niet eens die plaatsen maar enkele personen uit die plaatsen waarmee ik enig kontakt had.

5 Ook bij andere werkwijzen kan er m.i. gewerkt worden aan zowel het beheersen van de benodigde algoritmen als aan de zoekhouding van de leerlingen.

6 Het aantal niet-direkt-onderwijsgevenden was op de door ons bezochte scholen wel veel groter dan op de doorsnee Nederlandse school.

Berkeley 1980

ICME IV, het vierde internationale congres over wiskunde onderwijs, is van 10 tot 16 augustus 1980 gehouden te Berkeley, op de campus van de daar gevestigde tak van de University of California. Onder de rond 1900 deelnemers hebben zich ook zo'n 50 Nederlanders bewogen. Enkelen van hen doen hier kort verslag van een activiteit op het congres of wijden een kleine beschouwing aan een aspect van het congres. Hen is gevraagd geen volledig verslag te geven, maar iets te schrijven wat voor de Nederlandse wiskundeleraar interessant en van belang kan zijn. De volledige Proceedings van het congres zullen te zijner tijd verschijnen en voor verdergaand geïnteresseerden verkrijgbaar zijn.

de redaktie

Een leraar moet een gelukkig mens zijn

GERBEN BULTHUIS

Wanneer het mogelijk zou zijn indrukken van een congres schriftelijk zodanig over te brengen dat lezer en schrijver nadien dezelfde ervaring hebben, zouden congressen niet meer gehouden hoeven te worden. In tijden van Pais en bezuiniging een aantrekkelijke gedachte, maar jammer genoeg en ook gelukkig is de voorwaarde niet vervuld.
ICME V wordt in 1984 gehouden in Adelaide, Australië.

De opleiding van leraren is niet alleen in Nederland onderwerp van bespreking en onderzoek. Door congresdeelnemers van allerlei landen werd verhaald van nogal verschillende toestanden, ontwikkelingen en problemen. In Zuid-oost-Azië is een ontstellende behoefte aan (ook wiskunde-) leraren, door grote bevolkingsaanwas en stijgende onderwijsbehoefte; in Noord-Amerika en West-Europa neemt het aantal leerlingen af en is dientengevolge veel aandacht gericht op afvloeiingsregelingen. Deze grote verschillen nemen niet weg dat toch goede gedachtenwisselingen over de opleidingen gehouden konden worden. Vooral vragen als: 'Welke basisvoorwaarden zijn er voor een professioneel (wiskunde-) leraarschap' en 'Welke criteria kunnen aangelegd worden voor goed onderwijzen', werden omstandig besproken. Het zijn dan ook de vragen die onderwerp zijn van dit stukje.

Een gelukkig mens

John C. Egsgard, ervaren leraar aan een middelbare school in Canada en vooraanstaand bestuurder van lerarenorganisaties, zag als basis-gegevens voor een goed leraarschap: kennis van en liefde voor de wiskunde, liefde en respect voor leerlingen, en het vermogen leerlingen te leiden naar plezier in wiskunde. Daarvoor achtte hij noodzakelijk dat de goede leraar:
- voldoende kennis van de wiskunde bezit,
- een gelukkig persoon is,
- vreugde beleeft aan omgaan met mensen,
- het verlangen in zich heeft anderen deelgenoot te maken van wat hem bezighoudt,
- liefde voor de wiskunde heeft.

Het is begrijpelijk dat zijn model voor de opleiding tot leraar dan, na bestudering van de nodige wiskunde, bestaat uit een jaar hospiteren bij een excellente wiskundeleraar en in de zomervakantie daaropvolgend nog wat pedagogisch studeerwerk aan een opleidingsinstituut. Zo eenvoudig is dát . . . tenminste als er voldoende gelukkige mensen te vinden zijn en de voorraad excellente leraren toereikend is.
In dezelfde bijeenkomst gaf ook Jacques Nimier uit Reims, Frankrijk, zijn visie op 'What is a professional teacher of Mathematics?' Prachtig! In schitterende volzinnen, in het allermooiste frans (het congres wàs drie-talig) sinds De Gaulle, in sublieme tafereelschilderingen en treffende beeldspraak, liet hij voor ons, gewone stervelingen, een gestalte verrijzen van de leraar die . . . maagdelijke wouden . . . hooggebergte van . . . . Prachtig! We begonnen met de voordracht te beluisteren in het simultaan-vertaling-engels van een juffrouw met ook best wel een mooie stem, want och, nietwaar, dat frans: maar zij kon dit hogeschoolwerk niet bijbenen en prof. Nimier drong als een veroveraar door de barrière van onze koptelefoon en we hebben gecapituleerd en hem verder in het frans gevolgd. Prachtig! We zullen de Proceedings moeten afwachten om te lezen wat hij precies gezegd heeft, maar het was prachtig! Heel even voelde (denk ik) iedereen in de zaal zich een gelukkig mens. Maar ja, wat wil je, allemaal excellente wiskundeleraren (geweest).

Het dal is diep

Twee dagen eerder had Gerald R. Rising van de State University of New York te Buffalo, zijn zorgen geuit over de toestand van het wiskundeonderwijs in de Verenigde Staten en een aantal aanbevelingen gedaan voor de opleiding van wiskundeleraren.
Hij schatte dat tien procent van de leraren excellent genoemd kan worden, zeventig procent beoefent het vak alledaags, en twintig procent is uitgesproken onvoldoende. En die slechte cijfers schreef hij toe aan het lage salaris, aan de eenzijdige aandacht van de lerarenbonden voor materiële zaken, aan drugs, televisie, gebroken gezinnen, werkende moeders en de verwording van de school tot 'entertainment center' in de concurrentieslag met 'andere' media. Maar vooral zouden de leraren zo slecht zijn omdat de opleidingsinstituten zich bezig houden met wat al te gemakkelijk onderwijskundige research genoemd wordt, een activiteit 'whose relation to the climb up the professional career ladder of the so-called researcher is inversely proportional to its relation to classroom realities'.
Hoewel Rising naar eigen zeggen er de laatste tijd wel iets milder over was gaan oordelen, schoot hij toch ook nog met scherp op de simplistische benadering van lerarenopleidingen met van die lijstjes van dingen waarvan we willen dat leraren ze kunnen (de criteria) en studenten die een certificaat verwerven op grond van acceptabel beheersingsniveau van elk der criteria. Immers:
- onderwijzen is globaal en niet versnipperbaar,
- lijstjes-maken verleidt tot grote aandacht voor eenvoudige, meetbare vaardigheden en verwaarlozing van hooggekwalificeerde maar moeilijk meetbare,

- zo'n lijstje wekt de illusie van beoordeelbaarheid en leidt de aandacht af van werkelijke kritische evaluatie,
- het werkt door in een eveneens mechaniserende benadering van de schoolklas.

Wat is er dan wel te zeggen over 'the making of a professional mathematics teacher'? Als je leraren vraagt waar ze in hun opleiding wat aan gehad hebben, laken ze bijna allen de institutionele opleiding en spreken ze alleen waarderend over de hospiteerstage. Daar werd de hitte van de dag gevoeld en overleven geleerd. Dan maar net als Egsgard: stuur ze een jaar mee met een excellente leraar, het xerografisch model? We hebben echter maar tien procent van dat soort en die schijnen bovendien nog het minst geneigd te zijn zich te laten kopiëren. En dan nog, leert de nieuwe leraar dan wel meer dan net voldoende om de situatie áán te kunnen?
Rising liet zijn gehoor gaan door alle dalen van somberheid. Hij beschreef de vervreemding van opleidende universiteiten en colleges van de schoolpraktijk, de benauwde positie van de lerarenopleiding in het studieprogram, en daarbinnen dan nog vaak weer het leren van wiskunde in plaats van leren wiskunde te onderwijzen, de gebreken van de hospiteerstage, de onvoldoende institutionele begeleiding, ... het kon niet op.

Is er toch nog ...

Ondanks de sombere kijk op de toestand nation-wide, gaf Rising aanbevelingen voor zowel pre-service als in-service programs. We doen er een keuze uit.
- Men moet zich niet langer voor de gek houden en denken dat een voldoende stevige wiskundige ondergrond enige waarde heeft voor toekomstige leraren, zonder een passende vertaling en verklaring.
- In de studie zouden pedagogische schaduwcursussen gegeven moeten worden (de naam is van Peter Braunfeld, University of Illinois): een cursus wiskunde en daarbij een werkcollege over het leren van die wiskunde en het onderwijzen ervan. Het zou een goed ding voor álle studenten zijn wanneer bij voorbeeld twintig procent van de college-series zo'n schaduwcursus had.
- We moeten niet proberen precies te specificeren welke wiskunde-onderwerpen voor een leraar beslist nodig zijn. Liever algemeen begrip voor wat wiskunde is en wat mathematiseren inhoudt.
- Toekomstige wiskundeleraren moeten zoveel science krijgen als maar mogelijk is.
- Lerarenopleiders moeten al in een vroeg stadium de potentiële leraren identificeren en er voor zorgen dat zij verder onderwijs ontvangen van de beste docenten.
- De opleidingscursus zou uit moeten gaan van: 'Hoe leer je zelf?' en 'Wat zijn je eigen leerproblemen?' en 'Hoe zit het met de leerproblemen van anderen?' en 'Hoe zou je als leraar daar mee omgaan?'. En dat alles in context. Bij voorbeeld worden de studenten in een vroeg stadium problemen gepresenteerd die recht-toe-recht-aan lijken, maar toch onverwachte moeilijkheden hebben die ze ongeschikt maken voor een standaard-benadering. Daarmee geconfronteerd

wordt de studenten gevraagd hun persoonlijke reakties te bespreken en wat zij en anderen er aan kunnen doen.
- De opleider moet zijn visie, doelen en technieken vooral goed aan de man brengen bij de rector van de school waar de studenten hospiteren, opdat die zijn belangrijke steun-uit-autoriteit kan geven.
- In-service cursussen moeten, ondanks de drang in te gaan op praktische klasse-problemen, snel overgaan op 'general constructs and deeper thinking'.
- Heroriënteringscursussen over nieuwe wiskundeonderwerpen dienen aangegrepen te worden als gelegenheid pedagogische problemen in de nieuwe setting aan te vatten.
- In lerarenopleidingen is geen plaats en geen tijd voor onderwijskundig onderzoek. Het heeft geen of zelfs negatief effekt en het vreet tijd.

Sommige aanbevelingen zullen we graag overnemen; andere moeten we eerst nog wel even bij slikken. En dat zo'n man, met al die somberheid, toch nog het idee heeft dat er mogelijkheden zijn. Tja, Amerika is een groot land, als één procent van de leraren één trapje omhoog gaat (van onvoldoende naar alledaags, of van alledaags naar excellent) heeft dat toch nog effekt op een half miljoen leerlingen.

En dan die criteria

In weerwil van scepticisme van Rising en velen met hem, bestaat er behoefte aan criteria voor evaluatie van onderwijsaktiviteiten. Thomas J. Cooney van de University of Georgia verzorgde een voordracht over bijdragen van research aan onderwijsevaluatie.
Teneinde de kwaliteit van gegeven onderwijs te beoordelen is het onvoldoende geheel af te gaan op leerlingenvorderingen. Er zijn te veel interveniërende factoren om simpelweg te concluderen dat als leerlingen niet geleerd hebben, de leraar niet onderwezen heeft. Ook beoordeling dóór leerlingen kan moeilijk leiden tot verantwoorde evaluatie van het onderwijs, hoewel een zekere mate van relevantie er, dat weet ieder die zelf kinderen op school heeft, niet aan ontzegd kan worden.
Cooney richtte zich in zijn 'paper' meer specifiek op de professionele beoordeling als middel voor onderwijs-evaluatie en daarbij dan weer de ontwikkeling van criteria voor oordeelvorming. Welke research daar aan ten grondslag ligt, laten we in dit stukje maar achterwege en we bekijken de door hem ontwikkelde criteria. Daarbij moet dan eerst opgemerkt worden dat ze niet begrepen dienen te worden in kwantitatieve zin, waarna een veroordeling tot voldoende of onvoldoende kan volgen, maar meer in kwalitatieve zin.

Eerst de pedagogische criteria, en wel onderscheiden in cognitieve (die de wijze waarop de leerinhoud behandeld wordt, behelzen), affectieve (betreffende de meer interpersoonlijke relaties in de klas) en organisatorische.

Cognitieve criteria:
- het rekening houden met de beginsituatie van de leerlingen,
- variatie en flexibiliteit in het gebruik van voorbeelden en non-voorbeelden bij het aanleren van begrippen,
- gevariëerde illustratie van wiskundige principes, zoals stellingen en eigenschappen,
- gebruik van toepassingen, zowel uit de werkelijke wereld als binnen de wiskunde,
- nadruk op probleemoplossend denken, zoekstrategieën en het leren daarvan,
- duidelijkheid, vooral ten aanzien van de bedoeling van de les,
- het aandeel van de leerlingen, zowel in vraag en antwoord, als in activiteiten op het bord, aan tafel, etc..

Affectieve criteria:
- acceptatie van gevoelens en gedachten van de leerlingen,
- enthousiasme en gemotiveerdheid.

Organisatorische criteria:
- afwisseling van werkvormen e.d. in de tijd,
- tempo van de les, in relatie met mogelijkheden van de leerlingen,
- bewustheid van wat de leerlingen aan het doen zijn,
- soepelheid van de overgangen (op andere werkvorm b.v.),
- opmerkzaamheid ten aanzien van de mate waarin de leerlingen echt met de les bezig zijn.

Naast deze pedagogische zijn er de mathematische criteria, zoals:
- de correctheid van de behandelde wiskunde,
- de gestrengheid van de wiskunde, in relatie met de mogelijkheden van de leerlingen,
- de precisie van de taal en de zwaarte van het gebruik van symbolen.

Het zal duidelijk zijn dat deze criteria niet dezelfde zijn als de door Rising zozeer gewraakte atomiseringen van onderwijs-vaardigheid: alle zijn het aspecten van de les als geheel en geen verknipte vaardigheden waarvan voldoende binnen bepaalde tijd vertoond moeten worden. In de visie van Cooney blijft het essentiële in iedere onderwijs-evaluatie het vermogen van leraren zich bewust te worden van hun eigen gedrag, een vermogen dat gemakkelijker bereikt kan worden door het gebruik van specifieke criteria. Je kunt dan ook zeggen dat hét belangrijkste criterium is het vermogen van de leraar tot zelf-analyse. En dat is heel wat anders dan een lijst van 'do's and do not's'.

Blijft een vraag

Ieder van de hier opgevoerde sprekers heeft gepleit voor, laten we het zo maar noemen, een globale beschouwing van de kwaliteit van wiskunde-onderwijs en heeft daarmee afgewezen het verstrekken van een certificaat tot het geven van onderwijs op grond van voldoende scores op voldoende aantal punten van een lijst noodzakelijke vaardigheden. Cooney wijst ook pertinent dusdanig gebruik van zijn lijst af.

In de discussie, volgend op de bijdrage van Cooney, bleek dat in sommige ontwikkelingslanden wél de neiging bestaat, van staatswege, een certificaat te verstrekken op grond van 'som der scores groter dan N'. Uit de westerse landen werd vooral onderschreven dat de criteria dienden als basis voor zelf-analyse en het gesprek tussen opleider en opgeleide daar omheen. Vanuit de zelf-evaluatie van de student komt hij tot conclusies ten aanzien van wel of niet het-onderwijs-in-gaan en de opleider verstrekt hem de bevoegdheid op grond van het doorgemaakt hebben van het proces van zelf-analyse.
De geconstateerde tekorten aan onderwijsgevenden in de ontwikkelingslanden en de overschotten in de westerse landen lijken daar niet mee overeen te stemmen. Hoe zal zich dat bij ons ontwikkelen, in een toekomst met ombuigingen en twee-fasen-structuur?

***Over de auteur*:**

Gerben Bulthuis studeerde wiskunde aan de Groninger Universiteit, was van 1957 tot 1976 leraar in Stadskanaal, Groningen en Bussum, werkte enige tijd bij de SLO en is thans docent voor de didactiek van de wiskunde ten behoeve van de lerarenopleiding aan de Rijksuniversiteit te Leiden.

Ontvangen

International bibliography of Journals in mathematical Education. Gert Schubring in cooperation with Jutta Richter.
Dit is een uitgave van het Institut für Didaktik der Mathematik van de Universität Bielefeld, Universtätsstrasse, 4800 Bielefeld 1.
In dit boekje staan van 253 tijdschriften op het gebied van wiskundeonderwijs een aantal gegevens vermeld, zoals
- de titel in de oorspronkelijke taal
- de organisatie of het instituut dat het tijdschrift uitgeeft
- het adres waar men zich kan abonneren
- het internationale standaard serie nummer en de prijs van een jaarabonnement
- de taal waarin het tijdschrift meestal geschreven is
- de titel in engelse vertaling
- het land van herkomst en het bestreken gebied
- het eerste jaar van verschijnen, de frekwentie van verschijnen, het nummer van de lopende jaargang
- een korte karakteristiek van het tijdschrift.

Hoewel de bibliografie niet pretendeert volledig te zijn geeft het een schat aan informatie. Graag maken we van de gelegenheid gebruik de lezers van Euclides op het bestaan van dit boekje attent te maken. Het boekje is op het hiervoor gegeven adres te bestellen. Helaas is nergens de prijs vermeld.

Setvorming en wiskundeonderwijs[1)]

V Setvorming in de wiskunde van het havo en vwo

S. P. VAN 'T RIET

1 Inleiding

In de vier voorgaande artikelen in deze serie (Van 't Riet, 1979 en 1980: Van 't Riet en De Leeuw, 1980 a en b) is het begrip 'setvorming' geïntroduceerd. Het werd onderverdeeld in 'Einstellung' en 'rigiditeit'. Ook werd een schets gegeven van het onderzoek dat in de loop der jaren naar setvorming is gedaan. In dit laatste artikel zal ik een aantal voorbeelden van setvorming in de wiskunde van het havo en vwo de revue laten passeren en een paar suggesties doen hoe men in het wiskundeonderwijs met dit verschijnsel rekening kan houden. Daarmee heeft deze serie dan naar ik hoop haar einddoel bereikt, te weten een bijdrage te leveren tot de totstandkoming van een beter inzicht in wiskundeonderwijs.
Einstellung is in het eerste artikel omschreven als een type gedrag van leerlingen waarbij onder invloed van training ingewikkelde oplossingsmethoden gehanteerd blijven worden in situaties waarin de leerling beschikt over geschikte, meer gemakkelijke oplossingsmethoden. Rigiditeit is dan het onvermogen volgens de meer gemakkelijke methode te werk te gaan in geval de moeilijke methode niet meer tot resultaat leidt. Hier wil ik wijzen op een komplikatie. Bij de begrippen 'Einstellung' en 'rigiditeit' is wel verondersteld dat de leerling over de *juiste* oplossingsmethoden beschikt. Een leerling die opschrijft

$$x^2 - 10 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{10 \pm \sqrt{(10^2 - 0)}}{2}$$

vertoont slechts één Einstellung, te weten het gebruik van de abc-formule. Het feit dat hij in de abc-formule bij b het tweede getal uit de vergelijking invult, zou ik geen Einstellung willen noemen, maar een verkeerde organisatie van zijn oplossingsmethode.
In het eerste artikel heb ik betoogd dat rigiditeit wel, Einstellung niet altijd negatief beoordeeld moet worden. Dit hangt namelijk af van de door het onderwijs nagestreefde doelen. Wil men de leerlingen binnen een klasse van oplossingsmethoden voor een bepaald soort problemen een zekere flexibiliteit

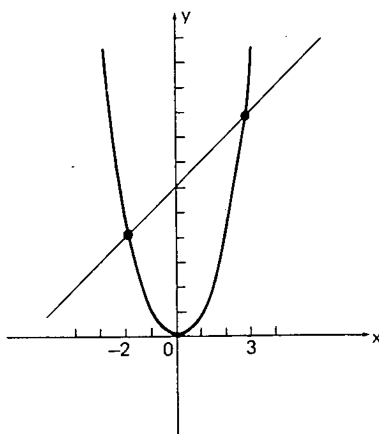
1 Veel dank ben ik verschuldigd aan Dr. P. G. J. Vredenduin voor het kritisch lezen en van opmerkingen voorzien van de koncepttekst van alle vijf artikelen van deze serie. Dit zelfde geldt Dr. L. de Leeuw voor die drie afleveringen die ik op mijn eigen naam geschreven heb.

bijbrengen dan is het duidelijk dat men een Einstellung van leerlingen als een minder gunstige vorm van gedrag zal aanmerken. In het wiskundeonderwijs zal dit inderdaad nogal eens voorkomen. Men moet zich dan wel de vraag stellen of men als leraar hiertoe wel het recht heeft. Dit is m.i. pas dan het geval als men in het onderwijs aan het verschijnsel Einstellung de nodige aandacht besteed heeft en de leerlingen expliciet geleerd heeft steeds de eenvoudigste oplossingsmethode voor een probleem te kiezen. Het volgende voorbeeld doet er aan twijfelen of dit wel altijd gebeurt.

2 Vergelijkingen oplossen of aflezen uit grafieken?

Van Hiele (1973, p. 15) geeft ter illustratie van de vraag:
'Is het gebruik van grafieken geoorloofd als bewijsmiddel?' het volgende voorbeeld (zie daarbij fig. 1).

> De leerlingen krijgen bijvoorbeeld een vraagstuk van de volgende vorm:
> Teken de grafiek van $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | y = x^2\}$.
> Kies voor x waarden van -5 tot $+5$.
> Teken in dezelfde figuur de grafiek van $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | y = x + 6\}$.
> Los op de ongelijkheid $\{x \in \mathbb{R} | x^2 > x + 6\}$.
> Als de leerlingen nu uit de grafiek aflezen:
> $\{x \in \mathbb{R} | x < -2 \vee x > 3\}$, dan wordt hun maar een deel van het aantal punten uitgekeerd dat voor deze opgaaf is vastgesteld, want de steller van de opdracht had zich voorgesteld, dat de leerlingen de vierkantsvergelijking: $x^2 - x - 6 = 0$ op een of andere manier zouden hebben opgelost.



Figuur 1 De grafieken van de funkties $x \to x^2$ en $x \to x + 6$, met behulp waarvan de oplossingsverzameling van de ongelijkheid $x^2 > x + 6$ is af te lezen.

Terecht protesteert Van Hiele tegen deze gang van zaken. In feite toont de leerling zich in dit verband de meester van de leraar. De leerling zoekt zich volgens de beste tradities van de wiskunde de meest gemakkelijke weg uit het probleem. Het is de leraar die hier aan setvorming lijdt, weliswaar niet in het

oplossen van wiskundige vraagstukken, maar in het bepalen van de doelstellingen van zijn onderwijs. Natuurlijk, één van de doelstellingen van het wiskundeonderwijs mag zijn het kunnen oplossen van vierkantsvergelijkingen. Maar men mag m.i. nooit de leerlingen leren als automaten vierkantsvergelijkingen op te stellen en op te lossen, ook in situaties waarin dat volstrekt overbodig is. Dan brengt men de leerlingen bewust een Einstellung bij. Wie wil toetsen of leerlingen vierkantsvergelijkingen kunnen oplossen, moet in een vraagstuk als het bovenstaande of (1) uitdrukkelijk vragen een oplossing te geven waarbij een vergelijking wordt opgelost, of (2) de coëfficiënten in de funkties zo kiezen dat bij het tekenen van de grafieken de coördinaten van de snijpunten niet evident te voorschijn komen. Beter nog zou het zijn als de leraar zijn leerlingen leert dat berekeningen bij het maken van grafieken en het aflezen van een oplossingsverzameling uit de verkregen figuur enerzijds en het oplossen van een vergelijking anderzijds hier twee oplossingsmethoden zijn die beide legitiem zijn, maar niet in alle situaties bruikbaar of efficiënt. Eerst dan kan een zeer belangrijke doelstelling van wiskundeonderwijs verwezenlijkt worden: Zelfstandig doelmatige algoritmen kunnen kiezen (Van Dormolen, 1974, p. 48).

3 Vierkantsvergelijkingen

Direkt in het verlengde van het voorgaande ligt de volgende vraag van Van Dormolen (1974, p. 23) in zijn 'Didactiek van de wiskunde':

> De vergelijkingen $x^2 = 36$, $x^2 - 5x = 0$, $x^2 - 5x + 6 = 0$ en $x^2 - 5x + 5 = 0$ kunnen elk volgens een ander algoritme opgelost worden. Elk van deze algoritmen is op zeker moment leerstof. Het is niet noodzakelijk iemand alle vier algoritmen te leren: alle vergelijkingen kunnen met de abc-formule worden opgelost. Bedenk een doelstelling waaruit men kan afleiden, dat het zinvol is iemand toch vier algoritmen te leren.

De aan het eind van paragraaf 2 geformuleerde doelstelling kan nu worden toegespitst: de abc-formule is voor alle vierkantsvergelijkingen doelmatig, maar niet steeds het meest efficiënt. In elke situatie het meest efficiënte algoritme kiezen is een doelstelling die goed nagestreefd kan worden met een veelsoortigheid aan vierkantsvergelijkingen.
Beperk ik mij nu tot het gebruik van de abc-formule en het ontbinden in faktoren, dan is het mogelijk dat leerlingen een set ontwikkelen op het gebruik van de abc-formule. Deze set is gemakkelijk aan te brengen met trainings- of setproblemen zoals $x^2 - 5x + 5 = 0$. Einstellung kan nu gekonstateerd worden als vervolgens problemen zoals $x^2 - 5x + 6 = 0$ worden voorgelegd. Deze problemen kunnen we kritische problemen noemen: zal de leerling van de abc-formule overstappen op het ontbinden in faktoren? Wellicht is het zelfs mogelijk hier rigiditeit aan het licht te brengen. Als extinktieproblemen kan men opgaven zoals $x^2 - 98x - 200 = 0$ nemen, die door het gekompliceerde rekenwerk nauwelijks met de abc-formule zijn op te lossen (het gebruik van zakrekenmachines buiten beschouwing gelaten). Maar de ongebruikelijk grote getallen zoals 98 en 200

moeten ons hier enigszins voorzichtig doen zijn. Het is mogelijk dat leerlingen niet in staat zijn te ontbinden met dit soort getallen.
Aan degenen die nu van het bovenstaande gebruik willen maken bij het opstellen van proefwerken zou ik wel het volgende in overweging willen geven. Einstellungseffekten mag men m.i. alleen dan met een toets meten, als men de leerlingen onderwezen heeft in het vermijden van Einstellung, d.w.z. het gebruik maken van het meest efficiënte algoritme. Elke toets behoort tenslotte aan te sluiten bij doelstellingen en bij leerstof. Vermeden moet worden dat toevallige gedragskenmerken proefwerkcijfers bepalen. Echter de mate waarin men in het huidige wiskundeonderwijs aandacht besteedt aan efficiëntie van algoritmen, zou ik met vraagtekens willen omringen.
In de wiskundeboeken voor het havo en vwo komt deze problematiek niet of in geringe mate aan de orde. In Sigma deel 3v (hoofdstuk 5, p. 130 e.v.) en in Van A tot Z deel HV-3b (hoofdstuk XVIII, p. 55 e.v.) worden ontbinden en abc-formule afzonderlijk behandeld zonder in te gaan op het gebruik maken van de meest efficiënte methode. In Getal en Ruimte deel 3VI (hoofdstuk IV, p. 57 e.v.) volgt op de behandeling van beide methoden een oefening (p. 65) die luidt:

Los op: gebruik niet de abc-formule, als het handiger kan.

In Moderne Wiskunde deel 4hv (hoofdstuk 8, p. 146 e.v.) vinden we ook een dergelijke opdracht (p. 155). In de antwoorden die dit laatste boek achterin voor de leerlingen afdrukt, staan vervolgens wel de oplossingsverzamelingen, maar niet de meest efficiënte oplossingsmethoden vermeld. Een zelfwerkzame leerling krijgt dus geen feed-back op het belangrijkste gedeelte van de opdracht.
Ik denk dat het goed zou zijn als de schoolboeken in verband met de hierboven besproken doelstelling, wat uitgebreider zouden ingaan op het vraagstuk van de efficiëntie van de te gebruiken algoritmen. Dit is niet alleen van belang bij het oplossen van vierkantsvergelijkingen, maar eveneens bij zeer vele andere onderwerpen in de schoolwiskunde. De volgende voorbeelden mogen dat illustreren.

4 Twee vergelijkingen met twee onbekenden

Voor het oplossen van een stelsel van twee vergelijkingen met twee onbekenden zijn verschillende methoden voorhanden. De meest voorkomende in de schoolwiskunde zijn de zogenaamde substitutiemethode en de methode van elimineren door kombineren, de laatste meestal uitgevoerd in de volgende of een aanverwante vorm[2]:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 2 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y - 2 = 0 \\ 2x - 2y - 2 = 0 \end{cases} \; - \qquad \underline{} \qquad 5y \quad = 0 \qquad \text{enz.}$$

Het bestaan van deze beide methoden biedt mogelijkheden te vragen naar het gebruik van de meest efficiënte. Maar ook binnen één methode zijn er meer en minder efficiënte aanpakken mogelijk. In een les gegeven door een hospitant maakte ik mee dat de stelsels vergelijkingen

2 Tegen deze en aanverwante oplossingsschrijfwijzen zijn ongetwijfeld bezwaren in te brengen. Ik heb echter weergegeven hetgeen ik in een aantal leerboeken ben tegengekomen. Zie b.v. Moderne Wiskunde deel 3hv, z.j., p. 143: Sigma deel 3v, 1975, p. 101: Lepoeter, 1974, p. 47.

$$\begin{cases} 2x - 7y + 3 = 0 \\ 3x - 7y + 1 = 0 \end{cases} \text{ en } \begin{cases} 2x - 3y \quad\; = 0 \\ 2x - \; y - 5 = 0 \end{cases}$$

door de leerlingen werden opgelost door de eerste vergelijking met 1 te vermenigvuldigen en de tweede met − 1 om vervolgens beide nieuw verkregen vergelijkingen op te tellen. Hoewel de hospitant de leerlingen tijdens de les herhaaldelijk wees op de mogelijkheid om direkt af te trekken, bleven vele leerlingen hardnekkig naar de optelling toewerken. Tijdens het nagesprek over de les bleek dat de hospitant in de voorafgaande les bij het introduceren van deze oplossingsmethode uitsluitend de mogelijkheid van het optellen behandeld had. Kennelijk hadden de leerlingen hierop een Einstellung verworven. Deze had waarschijnlijk voorkomen kunnen worden door bij de introduktie van deze methode direkt zowel het optellen als het aftrekken te behandelen. Dit geval lijkt in zijn eenvoud erg veel op dat van de wortelvermenigvuldigingen (zie Van 't Riet en De Leeuw, 1980 b). Het gaat om een keuze uit twee eenvoudige stappen aan het begin van het oplossingsproces. Ook hier valt één van die eenvoudige stappen ten prooi aan een sterke Einstellung als men beide mogelijkheden niet vanaf het begin naast en door elkaar behandelt (BLOK- versus MIXED-leerstofaanbieding).
Bovenstaande stof werd onderwezen uit Moderne Wiskunde deel 4hv (hoofdstuk 7, p. 142 e.v.). Het betreffende hoofdstuk eindigt met de opdracht:

Los de volgende stelsels vergelijkingen op. Kies daarbij de methode die je het gemakkelijkst voorkomt.

Daarna volgen veertien opdrachten. Ook hier weer geen verdere toelichting op het probleem van de efficiëntie der methoden, noch in de tekst, noch in de antwoordenlijst. Mijns inziens is dit jammer, daar er zodoende een kans gemist wordt op dit probleem wat dieper in te gaan. In de veertien opdrachten zijn dan ook niet alle mogelijkheden op dit gebied benut. Een opgave als bijvoorbeeld

$$\begin{cases} 2(2x - y) = 6 + x \\ x = 2x - y \end{cases}$$

zou in deze kontekst goede diensten kunnen doen.

5 Produkten met haakjes

Bij het oplossen van het laatste stelsel vergelijkingen zullen vele leerlingen de neiging hebben onmiddelijk in de eerste vergelijking de haakjes uit te werken om vervolgens met de geleerde methode van het elimineren door kombineren het stelsel op te lossen. Deze Einstellung op het uitwerken van haakjes komt veelvuldig voor in het wiskundeonderwijs. In het tweede artikel van deze serie gaf ik daarvan reeds een voorbeeld bij het bepalen van het snijpunt van de grafieken

$$f : x \rightarrow \frac{2(x^2 + 4x + 3)}{x + 3} \text{ en } g : x \rightarrow x + \tfrac{1}{2}.$$

Het uitwerken van de haakjes in de teller van f(x) is zeer suggestief, maar

blokkeert onmiddelijk de gemakkelijke oplossing met ontbinden van faktoren. Vraagt men zich af waar deze Einstellung vandaan komt, dan moet men ernstig rekening houden met de mogelijkheid dat zij een gevolg is van het onderwijs in de onderwerpen haakjes verdrijven en herleiden van produkten. Het uitwerken van dergelijke haakjesvormen wordt de leerlingen veelal zonder restrikties geleerd. In geen enkel leerboek voor havo en vwo ben ik tegengekomen dat de leerlingen bij dit onderwerp enige kritische zin wordt bijgebracht voor hetgeen zij uitvoeren. De oefening in het herleiden neemt soms een fabelachtige vlucht, zoals b.v. in Sigma deel 2hv (1974, p. 49) waarin opgaven voorkomen als:

$$\text{Bereken} \quad \frac{2ac}{3b}\left(\frac{9b^2}{4ac} + \frac{3ab}{4a^2c^2} - \frac{6b}{8ac^3}\right).$$

Men moet echter vrezen dat d.m.v. dergelijke opgaven vele leerlingen niet alleen geen kritische zin ontwikkelen voor wat er wiskundig van ze verlangd wordt, maar dat er zelfs een kritische tegenzin in wiskunde door ontstaat. Eenvoudige opgaven als:

$$\text{Bereken} \quad 12a(9b + 3 - 8b)$$

ben ik in geen enkel leerboek tegengekomen.
Breiden we in dit verband ons blikveld uit tot het vermenigvuldigen van veeltermen, dan wordt het optreden van Einstellung nog pregnanter. Eén van mijn hospitanten had eens in een 2-atheneumklas in een proefwerk over het vermenigvuldigen van veeltermen (Moderne Wiskunde deel 3hv, z.j., p. 7 e.v.) de volgende opgave opgenomen:

$$\text{Werk uit} \quad (1 + x + 6)^2.$$

Hij verbaasde zich over de 'domheid' van vele leerlingen die als antwoord hadden opgeschreven:

$$1 + x + 6 + x + x^2 + 6x + 6 + 6x + 36 = x^2 + 14x + 49.$$

In de oplossing van de opgave:

$$\text{Werk uit} \quad (x^2 + 2x - x^2 - 2y)(2y + 2x)$$

waren vele leerlingen blijven steken. Op mijn vraag of hij tijdens de behandeling van de leerstof dit soort sommen met de leerlingen besproken had, antwoordde hij ontkennend. De leerlingen moesten maar pienter genoeg zijn om zelf achter de handigste methode van oplossen te komen.
Wat hier gebeurt, is in feite zeer inkonsekwent. In de lessen werden de leerlingen met een flink aantal opgaven van het type

$$(3x - 2)^2 \quad \text{en} \quad (x - 1)(x^2 + x - 1)$$

getraind in de techniek van het uitwerken van dergelijke vermenigvuldigingen.

Waarom? Om ze te leren deze snel en effektief uit te voeren. Maar zodra de leerlingen dit leerproces achter de rug hebben en zij getest worden in hun vaardigheid, moeten ze onverhoeds het gebruik van die techniek weten uit te stellen om dit vooraf te laten gaan door een nimmer in het kader van deze opgaven tegengekomen herleiding. Natuurlijk, zowel herleiding als vermenigvuldiging van veeltermen moeten tijdens dit proefwerk voor de leerlingen bekende zaken zijn. Maar het wiskundeonderwijs heeft ze steeds afzonderlijk behandeld. Men kan hier met Van Parreren (1972, p. 40) spreken van systeemscheiding. Door het onderwijs is een systeem 'vermenigvuldigen van veeltermen' opgebouwd en vroeger ook al eens een systeem 'herleiden'. Het eerste systeem is tijdens het proefwerk in hoge aktiviteit. Plotseling wordt er oplossingsgedrag gevraagd vanuit het tweede, niet aktieve systeem. Dit is ongerechtvaardigd als leerlingen nimmer geleerd wordt verschillende van dergelijke systemen (oplossingsmethoden) in kombinatie te gebruiken. Wie in zijn onderwijs oplossingsmethoden leert zonder ze te kombineren, maar tijdens proefwerken wel kombinaties van oplossingsmethoden van de leerlingen verlangt, die toetst niet zijn onderwijs, maar de toevallige inventiviteit van de leerlingen op dat ene moment.
Andere opgaven die voor het wiskundeonderwijs bruikbaar zijn in dit verband, zijn:

Werk uit $(a + 3a)^2$ en $(a - b)^2 - (b - a)^2$.
Los op $(3x - 2)(x + 7) = 3x - 2$.

De laatste opgave is gebaseerd op de equivalentie $ap = aq \Leftrightarrow a = 0 \vee p = q$. Bij de behandeling van deze equivalentie in Getal en Ruimte deel 2V2 (1973, p. 24) wordt wederom nergens ingegaan op de efficiëntie-problematiek i.v.m. de meer algemene methoden om kwadratische vergelijkingen op te lossen.

6 Seteffekten bij het differentiëren van funkties

Bij het bepalen van de afgeleide van de funktie $x \rightarrow {}^a\log x$ is het nodig deze te schrijven als $x \rightarrow \frac{\ln x}{\ln a}$. Is de afgeleide van $x \rightarrow \ln x$ bekend, dan is de afgeleide van $x \rightarrow {}^a\log x$ eenvoudig te bepalen als $x \rightarrow \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}$. Bij de behandeling van deze afleiding stellen leerlingen soms voor de quotiënregel te gebruiken en werken dan uit:

$$\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{\frac{l}{x} \cdot \ln a - \ln x \cdot 0}{(\ln a)^2}.$$

Dit is een fraai voorbeeld van een Einstellung: De schrijfwijze van de funktie toont een quotiënt. Dit uiterlijke kenmerk bepaalt de keuze van de oplossingsmethode.
Sets op bepaalde regels van het differentiëren kan men met tal van funkties aan het licht brengen:

$x \to \sqrt{(x^2)}$: $x \to e^{\ln x}$
$x \to \ln 2x - \ln x$: $x \to \ln e^x$
$x \to \dfrac{x^2 - 5x}{x(5 - x)}$: $x \to \dfrac{d}{dx}\int_0^x (t^2 + 3t)dt$

Ook hier geldt echter weer: onderwijst men de leerlingen alleen in de regels van het differentiëren, of leert men hun zoeken naar de efficiëntste oplossingsmethode? In dit verband is een vraag van Van Dormolen (1974, p. 72) op zijn plaats:

> Wat zou de leraar bedoelen die tegen zijn leerlingen zegt: 'Bereken de uiterste waarden van de funktie $x \to 2\sin x \cdot \cos x$ zonder gebruik te maken van differentiaalrekenen.'? Vindt u het moreel aanvaardbaar iemand een goede oplossingsmethode te verbieden?

Het is maar welke doelstellingen je voor het wiskundeonderwijs kiest.

7 Setvorming, overal setvorming

Over de hele breedte van het wiskundeonderwijs komt de mogelijkheid van setvorming voor. In deze paragraaf geef ik nog een aantal incidentele voorbeelden om de uitgestrektheid van het verschijnsel te illustreren.

1 Voor de berekening van de afstand van twee punten $P(x_1, y_1)$ en $Q(x_2, y_2)$ in het vlak leidt men de formule af

$$d(P, Q) = \sqrt{((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2)}.$$

Maar hoe berekenen leerlingen de afstand van de punten $(-3, 5)$ en $(7, 5)$?

2 Voor een niet aan de y-as evenwijdige rechte in het vlak is de algemene vergelijking $y = ax + b$ in zwang. Gegeven twee punten vult men de coördinaten in en berekent men de coëfficiënten. Maar hoe zouden we willen dat leerlingen de vergelijking van de lijn door $(5, 4)$ en $(-1, 4)$ opstellen? Of van de lijn door $(-1, -1)$ en $(3, 3)$?

3 In Sigma deel 2hv (1974, p. 177) staat de volgende serie opgaven:

Los op in $\mathbb{R}$:
a $-\frac{1}{2} < \frac{2}{3}x < \frac{1}{4}$ b $-\frac{1}{3} < 1 - \frac{1}{4}x < \frac{1}{6}$ c $\frac{2}{7} < 2 - \frac{3}{14}x < \frac{4}{35}$.

Hier lopen zelfs docenten die de som voor de eerste maal behandelen, de kans setvorming te vertonen. Een hospitant heb ik eens zonder blikken of blozen som c zien oplossen als som a en b. Toen een heldere leerling hem erop wees dat er iets geks met deze som was, begon de hospitant een uitgebreide explikatie te houden over de komma in de oplossingsverzameling ⟨8, 8, 8⟩.

4 Opdracht: Bepaal de coördinaten van de snijpunten van de parabool met vergelijking $y^2 = 8x$ en de lijn met vergelijking $2x - y - 3 = 0$. Leerlingen zullen nu vaak een Einstellung vertonen op de afleiding $2x - y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = 2x - 3$, waarna met substitutie volgt: $(2x - 3)^2 = 8x$. De voortzetting van de oplossing is vervolgens nogal gekompliceerd. Ook hier is het leren zoeken naar de eenvoudigste oplossingsmethode van belang. Waarom voor y een uitdrukking in x gezocht? Waarom niet voor x een

uitdrukking in y? De afleiding $2x - y - 3 = 0 \Leftrightarrow 2x = y + 3$ met vervolgens het substitutieresultaat $y^2 = 4(y + 3)$ leidt tot een veel eenvoudiger oplossing. Het is maar wat men de leerlingen leren wil.

5 In Getal en Ruimte deel 2VI (1973, p. 43) komt de ongelijkheid $2x + 1 < 8$ met grondverzameling $\mathbb{N}$ voor. S is de oplossingsverzameling. Er wordt gevraagd: Waarom is $3 \in S$? Op de vraag van een hospitant hoe je dat nagaat, hoorde ik een leerling antwoorden: 'Eerst 1 naar de andere kant brengen.' De hospitant sputterde tegen: 'Is dat nu wel nodig?' 'Je moet toch S uitrekenen? Hoe kun je anders weten of 3 erin zit?' stelde de leerling met enige verwondering vast. Zij had een set ontwikkeld op het bepalen van oplossingsverzamelingen. Maar misschien moeten we voorzichtig zijn met deze konklusie in dit geval. Het is mogelijk dat de leerling niet meer beschikte over het schema van het oplossen van een variabele uit een open uitspraak.

6 In een 3-vwo-klas werden voorafgaand aan de behandeling van gebroken vergelijkingen, vergelijkingen van het type

$$\frac{x^2 + 5}{10} = \frac{3}{5}x$$

behandeld (zie Lepoeter, 1975, p. 73 e.v.). Het ging daarbij om oude stof, die al eerder uitgebreider aan de orde was geweest. Deze vergelijkingen werden opgelost door beide leden te vermenigvuldigen met één of meer faktoren uit de noemers. Daarna werden gebroken vergelijkingen behandeld zoals

$$\frac{1}{x + 3} = \frac{6}{x - 2}.$$

Deze vergelijkingen werden opgelost door op nul te herleiden, gelijknamig te maken, enz. Zij vormden het leeuwendeel van de doorgenomen leerstof. Een hospitant die in deze klassen over deze stof een proefwerk gaf, meldde nu dat 41 van de 48 leerlingen de opgave

$$\frac{x^2 + 5}{3} = \frac{3}{2}x$$

hadden opgelost op de wijze van de gebroken vergelijkingen. Slechts zeven leerlingen losten de vergelijking op door beide leden met 6 te vermenigvuldigen.

7 De vektormeetkunde laat allerlei mogelijkheden tot vorming van sets zien. Daarvan het volgende voorbeeld (Sigma, Vectormeetkunde en Statistiek, deel 4/5h, 1977, p. 146).

> Bereken $a \in \mathbb{R}$ als de punten $A(3, -1, 4)$, $B(1, 0, 1)$ en $C(-1, a, -2)$ op één lijn liggen.

De leerlingen zullen nu geneigd zijn de vektorvoorstelling van de lijn door A en B op te stellen, daarin de coördinaten van C te substitueren om vervolgens de waarde van de parameter en de waarde van a te berekenen. Een eenvoudiger

methode is hier op te merken dat er een waarde van p zal bestaan waarvoor geldt: $\vec{AB} = p\,\vec{BC}$. Na het uitschrijven van deze gelijkheid met behulp van kentallen is de gevraagde waarde van a direkt af te lezen. Veelvuldige training in het leren opstellen van vektorvoorstellingen en nadruk erop de techniek daarvan goed te beheersen kan er hier toe leiden dat naar andere aanpakken van het probleem niet meer gezocht wordt. Het zoeken naar korte en efficiënte oplossingen is een doelstelling die in de vektormeetkunde wellicht het meest systematisch is na te streven.

8 Setvorming bij het gebruik van hulpmiddelen

Tot slot nog een voorbeeld waaruit kan blijken dat setvorming niet alleen optreedt bij het gebruik van oplossingsmethoden en algoritmen, maar ook bij het hanteren van hulpmiddelen zoals passer en geodriehoek. Het onderstaande voorbeeld van Einstellung kreeg ik toegestuurd van S. L. Kemme en ik neem het enigszins samengevat over:
De les was een afsluiting van een serie lessen over doorsnijdingen van meetkundige plaatsen (Getal en Ruimte deel 2VI, 1973, p. 49 e.v.). De leerlingen kregen de volgende opdracht uitgedeeld:

> Jan de Vries maakt een fietstocht door een bosrijke omgeving van Drenthe. Hij raakt de weg kwijt, maar komt tenslotte bij een kruising aan met een wegwijzer: 20 km naar Groningen, 20 km naar Drachten, 15 km naar Assen. Waar staat Jan?

Op het stencil was een fragment van een kaartje getekend met daarop de plaatsen Groningen, Drachten en Assen en een aantal naburige, bekende plaatsen.
Nadat de leerlingen de schaalproblemen overwonnen hadden, kwamen al gauw de eerste cirkels op papier. Ook leerlingen die met de geodriehoek waren begonnen, zagen snel in dat je met de passer beter kunt omcirkelen. Met een minuut of vijf had toch zeker 70% van de klas de opgaaf af.
Interessant was echter het gedrag van een meisje, dat alleen aan een tafeltje zat. Ze had alleen een beetje kontakt met haar voorbuurvrouw. Toen bijna 70% van de klas klaar was, zat zij nog met haar geodriehoek te modderen. Eerst vanuit Drachten, dan vanuit Groningen, dan vanuit Assen. Ze had een passer gebruiksklaar voor haar liggen. Ze zag dat bijna de hele klas passers aan het gebruiken was. Tenslotte ging ze ook een cirkel tekenen, maar een met het midden van het lijnstuk Drachten-Groningen als middelpunt. Daarna ging ze weer vlijtig verder met haar geodriehoek. Eindelijk vond ze het gevraagde punt.
Ik was een beetje in de buurt blijven hangen. Ze zei: 'Ik heb het.' Ik ging naast haar staan en vroeg: 'Hoe weet je dat?' Ze ging het keurig voor me uitmeten en inderdaad, het klopte precies. Toen vroeg ik: 'Waar is die cirkel voor?' Daarop begon ze aan haar uitleg, een paar punten van de cirkel aanwijzend: 'Nou, die punten liggen 20 km van Groningen en van Drachten...' Ze brak haar verhaal plotseling af. 'O nee, dat is niet goed.' Met haar handen gaf ze aan hoe die cirkels wel hadden moeten lopen en begon de boel met een gummetje uit te vegen. 'Nu ga ik het goed doen,' zei ze, pakte de passer en tekende de drie cirkels.
Wat me vooral trof, was het feit dat ze zo volhardend was in het gebruik van haar geodriehoek en dat ze door mijn simpele vraag zo plotseling omsloeg in haar

gedrag, doordat ze gedwongen werd de zaak te verwoorden en toen haar fout inzag. Ik vroeg me af, in verband met mijn interesse voor taalaspekten, of dit een vorm van Einstellung was en of een dergelijk verwoorden een remedie kan zijn tegen dit soort Einstellungen (einde citaat).

Naar aanleiding van dit voorbeeld en de vraag waarmee het eindigt, wijs ik op de beschouwingen van Eliawa (1967) over Einstellung. Hij stelt dat een Einstellung pas dan overwonnen kan worden als er een zogenaamde Objektivierungsakt plaatsvindt. Het aan Usnadse ontleende Objektivierungsbegrip komt min of meer hier op neer, dat de denkende persoon zijn denken als het ware moet verplaatsen naar een hoger niveau, vanwaaraf hij zijn aanvankelijke denken kritisch kan beoordelen. Men kan ook zeggen: het eigen denken bij het oplossen van een probleem moet vervolgens tot objekt van denken op een hoger plan gemaakt worden. Loopt men vast bij het oplossen van een probleem, dan moet men zijn eigen oplossingsgedrag gaan onderzoeken op andere mogelijkheden. Het is duidelijk dat vragen als: 'Hoe weet je dat?', 'Waarom heb je dat zo gedaan?', 'Kon je het ook anders doen?' de funktie hebben de leerling te stimuleren over zijn oplossingsgedrag na te denken, d.w.z. een Objektivierungsakt te verrichten. Het onder woorden proberen te brengen van datgene waarmee je bezig bent en de wijze waarop je ermee bezig bent, kan een uitstekende remedie zijn tegen Einstellungen. Echter niet de enig mogelijke remedie, zoals het in de vorige twee artikelen beschreven onderzoek heeft laten zien.

9 Tenslotte

In deze serie artikelen is het verschijnsel setvorming van verschillende kanten belicht. Ik zou willen afsluiten met een paar behartenswaardige opmerkingen van Van Hiele (1973).

> Het advies om leerlingen zoveel mogelijk oplossingsmethoden te leren voert tot verkwisting van denkarbeid. De oplossingsmethoden vertonen namelijk een eigen struktuur en het leren doorzien van deze struktuur is heel wat effektiever dan het aanleren van de oplossingsmethoden stuk voor stuk (p. 24).

Dit heeft alles te maken met wat er gebeurt als een leerling Einstellung of rigiditeit vertoont: Het inzicht in de struktuur van een algoritme en de kenmerken van de situatie waarin dit algoritme gebruikt kan worden, ontbreekt. Als in een vierkantsvergelijking $b = 0$ of $c = 0$, dan zal de leerling moeten begrijpen, *waarom* de abc-formule minder geschikt is dan een andere oplossingsmethode.
Over de vaardigheid in het gebruik van oplossingsmethoden merkt Van Hiele op:

> Daar vaardigheid slechts middel en niet zelfstandig doel is, kan een lang voortgezette oefening tot negatieve resultaten leiden. De handeling zal bij langdurig oefenen automatisch gaan verlopen en wel zo, dat daarbij het inzicht in de handeling verloren gaat. Men sluit dan de weg af om tot een hoger inzicht te komen, omdat daarvoor het begrijpen van de eigen handeling noodzakelijk is (p. 37).

Wat dit aangaat moet men echter vrezen dat er momenteel een bedenkelijke ontwikkeling plaats vindt in bepaalde hoeken van het wiskundeonderwijs. De roep om training en drill wordt weer regelmatig gehoord. En beloond, getuige de opgang van de 'wiskunde-opgavenbundels voor het hele voortgezet onderwijs'. Twee citaten uit Informatief (8, nr. 1, september 1979) illustreren de opvattingen waarvanuit dit gebeurt.

> Vooral door doen en weer doen en nog eens doen maken leerlingen zich immers nieuwe leerstof eigen. De voortdurende training in het oplossen van vraagstukken leidt ertoe, dat de leerling (terecht) het gevoel krijgt de desbetreffende stof te beheersen.

En:

> Goede opgavenbundels bieden een doorgaans noodzakelijke aanvulling op de gebruikte wiskundemethode. Ze verhogen daarmee de flexibiliteit van het wiskundeonderwijs, doordat ze het de docent gemakkelijker maken het onderwijs aan te passen aan de verschillen die er nu eenmaal tussen de leerlingen bestaan.

De flexibiliteit van het wiskundeonderwijs! Maar hoe zit het met *de flexibiliteit van het leerresultaat*? Moeten we dan per se weer terug naar de goeie, ouwe tijd? Met als enig verschil dat de vlugge leerlingen wat minder, de langzame leerlingen wat meer getraind en gedrild worden? Of, zoals Luchins en Luchins (1950) al zeiden: 'Our schools may be concentrating so much on having the child master the habits, that the habits are mastering the child'?
Ik hoop dat er andere doelstellingen voor het wiskundeonderwijs zullen worden gekozen.

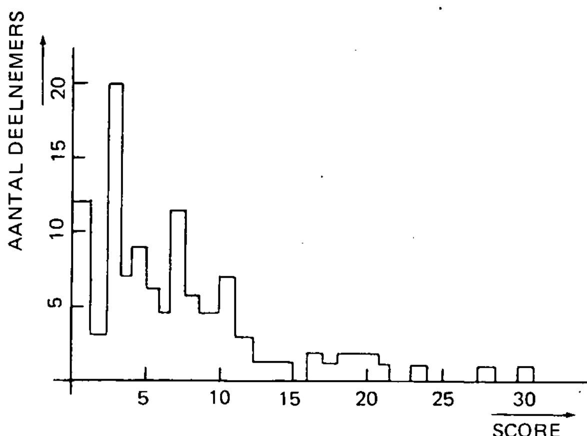
Literatuur (zie ook: Van 't Riet, 1979)

Dormolen, J. van, *Didactiek van de wiskunde*, Oosthoek, Utrecht, 1974.
Eliawa, N. A., *Die Denktätigkeit und die Einstellung*. In: Neumann, H., (Red.), *Untersuchungen des Denkens in der sovjetischen Psychologie, Volk und Wissen*, Berlijn, 1967.
Getal en Ruimte deel 2V1, 3e druk, Tjeenk Willink/Noorduijn, Culemborg, 1973.
Getal en Ruimte deel 2V2, 3e druk, Tjeenk Willink/Noorduijn, Culemborg, 1973.
Getal en Ruimte deel 3V, 3e druk, Tjeenk Willink/Noorduijn, Culemborg, 1974.
Hiele, P. M. van, *Begrip en inzicht*, Muusses, Purmerend, 1973.
Informatief 8, nr. 1, Wolters-Noordhoff, Groningen, september 1979.
Lepoeter, P. E., *Gids voor de nieuwe wiskunde deel IIIA*, Meulenhoff Educatief, Amsterdam, 1974.
Lepoeter, P. E., *Gids voor de nieuwe wiskunde deel IIIB*, Meulenhoff Educatief, Amsterdam, 1975.
Moderne Wiskunde deel 3hv, 3e druk, Wolters-Noordhoff, Groningen, z.j.
Moderne Wiskunde deel 4hv, 3e druk, Wolters-Noordhoff, Groningen, z.j.
Parreren, C. F. van, *Leren op school*, 9e druk, Wolters-Noordhoff, Groningen, 1972.
Riet, S. P. van 't, *Setvorming en wiskundeonderwijs, I Einstellung en rigiditeit bij het oplossen van wiskundige vraagstukken*, Euclides 1979, 55, p. 41.
Riet, S. P. van 't, *Setvorming en wiskundeonderwijs, II De aard van de leerervaring*, Euclides 1980, 55, p. 308.
Riet, S. P. van 't, Leeuw, L. de, *Setvorming en wiskundeonderwijs, III Het voortzetten van getallenrijen met behulp van algoritmen; een onderzoek*, Euclides 1980 a, 56, p. 22.
Riet, S. P. van 't, Leeuw, L. de, *Setvorming en wiskundeonderwijs, IV Het vermenigvuldigen van wortelgetallen; eenvoudige algoritmen*, Euclides 1980 b, 56, p. 95.
Sigma deel 2hv, Wolters-Noordhoff, Groningen, 1974.
Sigma deel 3v, Wolters-Noordhoff, Groningen, 1975.
Sigma deel 4/5h, Vectormeetkunde en statistiek, Wolters-Noordhoff, Groningen, 1977.
Van A tot Z deel HV-3b, 2e druk, Muusses, Purmerend, 1974.

Tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade 1980

Aan de Tweede Ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade 1980 namen 105 leerlingen van het vwo deel. Van hen hadden zich 96 geklasseerd door in de Eerste Ronde een score van 14 punten of meer te behalen, de overige 9 waren uitgenodigd op grond van hun prestaties bij de Pythagoras Olympiade, een wedstrijd in het blad Pythagoras.

De tweede ronde werd gehouden op donderdag 28 augustus 1980 van 13.00-16.00 uur te Utrecht. Er waren vier opgaven. Bij de beoordeling zijn voor elke opgave maximaal 10 punten toegekend. Overzicht van de resultaten:



Prijswinnaars:

1	Tonny Hurkens, Merletcollege, Cuyk	30 punten
2	Jan Adriaan Leegwater, H. Jordanlyceum, Zeist	28 punten
3	Erik Admiraal, Anton van Duinkerkencollege, Veldhoven	24 punten
4	Bram Bouwens, SG Philips van Horne, Weert	21 punten
5	Daan Krammer, SG Bataafse Kamp, Hengelo	20 punten
6	Sieds van de Schaaf, Chr. Gymnasium, Leeuwarden	20 punten
7	Matthijs Hebly, Mendelcollege, Haarlem	19 punten
8	John Somers, Juvenaat HH, Antwerpen	19 punten
9	Paul van der Wagt, Baudartiuscollege, Zutphen	18 punten
10	Erick de Vries, R.S.G. Meppel	18 punten

Opgaven

1 Gegeven is dat de functie

$$x \to x^3 - ax + 1 \quad (a \in \mathbb{R})$$

drie verschillende reële nulpunten heeft.
Bewijs dat het nulpunt x_0 met de kleinste absolute waarde voldoet aan

$$\frac{1}{a} < x_0 < \frac{2}{a}.$$

2 a Bepaal het produkt van alle delers van 1980.
b Bepaal het produkt van alle delers van 1980^n (n geheel, $n > 1$).
N.B.: Onder de *delers* van een positief geheel getal M verstaat men de positieve gehele getallen d waarvoor M/d een geheel getal is.

3 Gegeven is een niet-rechthoekige driehoek ABC. D is het voetpunt van de hoogtelijn uit A, E dat van de hoogtelijn uit B en F dat van de hoogtelijn uit C. P is het midden van het lijnstuk EF, Q dat van FD en R dat van DE. p is de lijn door P loodrecht op de lijn BC, q de lijn door Q loodrecht op CA en r de lijn door R loodrecht op AB.
Bewijs dat p, q en r door één punt gaan.

4 In Venetianië is de kleinste munteenheid een dukaat. De minister van financiën geeft zijn ambtenaren de volgende opdracht: 'Ik wens zes soorten geldbiljetten, elk ter waarde van een geheel aantal dukaten. Die zes waarden dienen zo te zijn, dat er een getal N bestaat met de volgende eigenschap. Elk geldbedrag van n dukaten (n positief en geheel) waarbij $n \leqq N$ is, kan worden betaald op zo'n manier dat van elke soort biljetten ten hoogste twee exemplaren worden gebruikt, hetzij om te betalen, hetzij om terug te geven. Ik wens die zes waarden bovendien zo, dat N zo groot mogelijk is. Bepaal die zes waarden en geef daarbij een bewijs dat aan alle gestelde voorwaarden is voldaan.'
Los het probleem van die ambtenaren op.

Oplossingen

1 Het punt van symmetrie van de grafiek is (0, 1). De grafiek snijdt de x-as drie maal, dus $x_0 > 0$ en $a = -f'(0) > 0$. Zijn x_1 en x_2 de twee andere nulpunten, dan is $x_0 x_1 x_2 = -1$, dus $0 < x_0 < 1$ en $1 < x_0{}^3 + 1 = ax_0 < 2$ zodat $1/a < x_0 < 2/a$.

2 a $1980 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$. Elke deler bevat 0, 1 of 2 factoren 2 en 3, en 0 of 1 factor 5 en 11. Er zijn dus $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 36$ delers. Elke deler van $1980 = 2^2 \cdot 495$ is het produkt van een deler van 495 en 2^0, 2^1 of 2^2 (en omgekeerd). Van de 36 delers van 1980 zijn er dus precies 12 met twee factoren 2, 12 met 1 factor 2, en 12 met nulfactoren 2. In het produkt van alle delers komen dus $(1 + 2) \cdot 12$ factoren 2 voor. Evenzo komen er

$(1 + 2) \cdot 12$ factoren 3, $1 \cdot \frac{36}{2} = 18$ factoren 5 en 18 factoren 11 voor. Het produkt is dus $2^{36} \cdot 3^{36} \cdot 5^{18} \cdot 11^{18} = 1980^{18}$.

b Analoog: het aantal delers van $1980^n = 2^{2n}3^{2n}5^n11^n$ is $N = (2n + 1)(2n + 1)(n + 1)(n + 1)$. Het aantal factoren 2 en 3 in het produkt van alle delers is

$$s = \frac{1}{2n + 1} \cdot N \cdot (1 + 2 + \ldots + 2n) = n(n + 1)^2(2n + 1)^2.$$

Het aantal factoren 5 en 11 is

$$\frac{1}{n + 1} \cdot N \cdot (1 + 2 + \ldots + n) = \tfrac{1}{2}n(n + 1)^2(2n + 1)^2 = \tfrac{1}{2}s.$$ Het produkt van alle delers is dus $2^s \cdot 3^s \cdot 5^{s/2} \cdot 11^{s/2} = 1980^{s/2}$.

3 Zij H het hoogtepunt van $\triangle ABC$ en Z het zwaartepunt van $\triangle DEF$. Z verdeelt DP, EQ en FR in de verhouding 2 : 1. Zij T het beeld van H onder de puntvermenigvuldiging vanuit Z met factor $-\frac{1}{2}$. De beelden van HD, HE en HF zijn dan TP, TQ en TR. Zij zijn evenwijdig met hun originelen, dus het zijn de lijnen p, q en r, die daarom door één punt, nl. T, gaan.

4 Bij elke betaling kunnen er, vanuit het standpunt van één van de twee betrokkenen, 0, ± 1 of ± 2 biljetten van elk van de zes soorten gegeven worden. Het aantal mogelijke bedragen is dus op zijn hoogst $5^6 = 15625$. Is aan de opdracht van de minister voldaan dan kan volgens de regels elk geheel bedrag van $-N$ t/m N dukaten worden afgerekend; dus dan zijn er $2N + 1$ mogelijke betalingen. Aangezien $15625 = 2 \cdot 7812 + 1$ geldt dus $N \leqq 7812$. De maximale waarde $N = 7812$ kan worden gerealiseerd met biljetten van $5^0, 5^1, 5^2, 5^3, 5^4$ en 5^5 dukaten. Om een willekeurig geheel bedrag van n dukaten ($|n| \leqq 7812$) te betalen, schrijve men $n + 7812 = a_0 + a_1 \cdot 5 + a_2 5^2 + a_3 5^3 + a_4 5^4 + a_5 5^5$ met $a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ (dus men schrijft $n + 7812$ in het vijftallig stelsel: merk op dat $0 \leqq n + 7812 \leqq 5^6 + 1$). Aangezien $7812 = 2 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 5^2 + + 2 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^4 + 2 \cdot 5^5$ geeft de schrijfwijze $n = (a_0 - 2) + (a_1 - 2) \cdot 5 + + (a_2 - 2) \cdot 5^2 + (a_3 - 2) \cdot 5^3 + (a_4 - 2) \cdot 5^4 + (a_5 - 2) \cdot 5^5$ dan het betalingsvoorschrift.

Aanvulling-korrektie

Naar aanleiding van het artikel van kollega R. Leentfaar, Raaklijnen aan tweedegraadskrommen in het havo-onderwijs (blz. 138), maakte de uitgever van de serie Moderne Wiskunde, Wolters-Noordhoff, ons erop attent dat de door de auteur in een naschrift gemaakte opmerking over deel 8h sinds ongeveer een half jaar niet meer juist is. In de bijdrukken van dit deel is het gebruik van de kettingregel vóór het introduceren van die regel vermeden.
Wij bieden de auteurs en de uitgever onze excuses voor het afdrukken van dit naschrift aan.

de redaktie

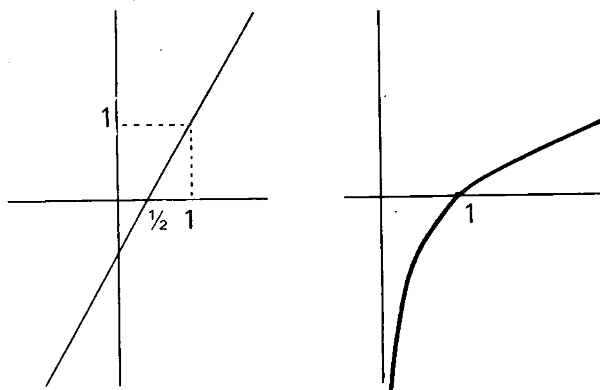
Korrel

HAVO 1980, eerste periode, opgave 3b

Het bij deze opgave behorende correctievoorschrift heeft nogal stof voor discussie opgeleverd. Vandaar dat ik er iets over wil zeggen.
Eén opmerking vooraf. In een correctievoorschrift wordt soms een bepaalde methode in details gevolgd. Het is niet uitgesloten dat een kandidaat een andere, eveneens correcte manier volgt en deze tot een goed eind brengt. Het spreekt vanzelf dat dan het maximaal aantal punten hiervoor toegekend moet worden. Volgt een kandidaat een dergelijke methode, maar is zijn oplossing niet feilloos, dan zal de corrector zelf moeten bepalen welk deel van het totaal aantal verkrijgbare punten hij wenst toe te kennen. Niemand zal het werk van een kandidaat toch willen afkeuren, omdat de CVO het anders gedaan heeft!
Nu het bewuste vraagstuk. Gevraagd werd de grafiek te tekenen van de functie $g: x \to {}^3\log(2x - 1)$.
De CVO leidde deze grafiek af uit die van de standaardfunctie $x \to {}^3\log x$. Waarschijnlijk had zij daarbij voor ogen via de grafiek van $x \to {}^3\log(x - \frac{1}{2})$ te komen tot die van $x \to {}^3\log 2(x - \frac{1}{2})$.
Men kan het echter ook anders doen. We beschouwen eerst de functies

$$h: x \to 2x - 1 \text{ en } k: x \to {}^3\log x$$

Hiervan tekenen we (eventueel) de grafieken.



Nu redeneren we als volgt.
$2x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$, dus $D_g = \langle \frac{1}{2}, \to \rangle$.
$2x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = 1$, dus het nulpunt van g is 1.
$2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$, dus de verticale asymptoot van de grafiek van g is de lijn $x = \frac{1}{2}$.
h is een stijgende functie, k is stijgend in zijn domein, dus g is stijgend in zijn domein.
Met behulp van deze resultaten tekenen we de grafiek van g.

Vergelijken we deze methode met de officiële voorschriften (Vademecum blz. 29), dan zien we een afwijking. We hebben niet het tekenschema van $g'(x)$ bepaald. Allicht niet, want dat valt buiten de havo-stof. Het bepalen van dit tekenverloop dient echter alleen om na te gaan waar g stijgt, daalt en extreem is. Dat hebben we wel gedaan.
Deze methode is eerst correct uitgevoerd, als alle genoemde stappen uitgevoerd zijn en niet bijv. de laatste stap is weggelaten en vervangen door het tekenen van enkele punten. Dit volgt uit hetgeen op blz. 29 van het Vademecum staat.
Wie op deze manier de grafiek verkregen heeft, heeft een correcte weg gevolgd en dient daarvoor met het maximaal aantal punten gehonoreerd te worden.
Men kan tegenwerpen dat de methode niet geheel 'volgens het boekje' is, omdat het tekenschema van $g'(x)$ ontbreekt. Dan nog is op andere gronden te verdedigen, dat de oplossing correct is. Immers de kandidaat heeft de grafiek van g afgeleid uit die van de standaardfuncties h en k en heeft volledig aangegeven hoe dit geschied is. Ik vrees, dat de lezer toch nog de angst heeft, dat deze interpretatie van de voorschriften alleen mijn persoonlijke opvatting weerspiegelt. Ik kan hem geruststellen. Bovenstaand stukje is geschreven onder voorkennis van de CVO.

P. G. J. Vredenduin

OPROEP

Met ingang van het komende schooljaar komt in de redaktie van Euclides de funktie van redaktie-sekretaris vrij.
De huidige sekretaris, Bart Muller, heeft te kennen gegeven de komende jaren wat meer tijd voor zijn gezin te willen hebben.
Het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren roept belangstellenden voor de funktie van redaktie-sekretaris op zich zo spoedig mogelijk te melden bij de voorzitter van de redaktie.

De taak van de sekretaris bestaat vooral uit het verzorgen van de kontakten tussen enerzijds de uitgever en anderzijds de redaktie en auteurs van wie een artikel geplaatst wordt.

Van de nieuwe sekretaris wordt verwacht dat hij/zij
- ongeveer één avond per week beschikbaar heeft voor het werk
- nauwgezet kan werken
- een aantoonbare belangstelling voor de didaktiek van de wiskunde heeft.

Na (persoonlijke) kontakten met één of meer leden van de redaktie en van het bestuur, benoemt het bestuur van de vereniging de nieuwe sekretaris voor een periode van vier jaar. Alvorens tot benoeming over te gaan wint het bestuur het advies van de uitgever in.

Voor inlichtingen met betrekking tot deze vakature kan men zich wenden tot de voorzitter van de redaktie, Bert Zwaneveld, tel. 020-738912.

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth.

Opgaven

432. In New Scientist worden geregeld opgaven geplaatst die door de lezers opgelost moeten worden. Een van de opgaven was de volgende.
Vind drie verschillende gehele positieve getallen p, q en r waarvoor geldt dat $p + q$, $p - q$, $p + r$, $p - r$, $q + r$, $q - r$ alle een kwadraat zijn van een geheel getal. Verder moet $p + q + r$ minimaal zijn.
Er kwam geen oplossing binnen. Het enige commentaar van de puzzelredacteur was: 'Shame to you!
Maar een oplossing plaatste hij niet.
Dr. R. S. Tjaden Modderman, een 76-jarige fysisch-chemicus, te Rozendaal, maakte me opmerkzaam op deze opgave en leverde me ook een oplossing. Waarvoor ik hem dankbaar was, want ik kon hem niet vinden. Wilt u het ook eens proberen?

433. Een boer heeft een cirkelvormig stuk land met een straal van 10 meter. Hij laat op het land n geiten grazen. Elke geit zit vast aan een touw dat aan een pin bevestigd is. Elk deel van het land moet voor minstens één geit bereikbaar zijn. De lengte van het langste touw moet minimaal zijn.
Hoe groot is het langste touw?
Los dit probleem op voor $n = 2$, $n = 3$, . . . , $n = 7$.

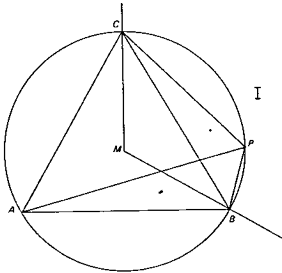
434. A en B spelen het volgende spel. Gegeven zijn twee positieve gehele getallen a en b: $a > b$. A begint en trekt een door hem te kiezen aantal keren b van a af. De rest r mag niet negatief zijn. Is $r < b$, dan trekt B nu een door hem te kiezen aantal keren r van b af: is $r \geqq b$, dan trekt hij een door hem te kiezen aantal keren b van r af. Wie als rest 0 bereikt, heeft gewonnen.
Voorbeeld. $a = 156$, $b = 33$
A trekt 66 van 156 af. Rest 90.
B trekt 66 van 90 af. Rest 24.
A trekt 24 van 33 af. Rest 9.
B trekt 18 van 24 af. Rest 6.
A trekt 6 van 9 af. Rest 3.
B trekt 6 van 6 af. Rest 0. B wint.
Gevraagd: als a het grootste getal is, welke getallen zijn er dan verliezend voor A? (Uit The Raymond W. Brink Selected Mathematical Papers)

Oplossingen

429. Een dokter bestelt elke ochtend op zijn spreekuur 12 patiënten. Hij laat ze om de 10 minuten komen. Van de patiënten vereisen er 6 een behandeltijd van 9 en 6 van 11 minuten. Zijn spreekuur loopt daardoor gemiddeld 1.72 minuut uit.
Om tijd te winnen bestelt hij alle patiënten, behalve de eerste, 1 minuut vroeger. Hoeveel tijd wint hij gemiddeld en hoeveel wordt de wachttijd van zijn patiënten gemiddeld groter?
We onderscheiden drie gevallen.
a De eerste patiënt vereist 9 minuten behandeltijd. Alle volgende patiënten komen dan 1 minuut vroeger en worden ook 1 minuut vroeger geholpen. De dokter wint 1 minuut en de patiënten hebben onveranderde wachttijd.
b De volgorde van de tijden is bijv. 11, 11, 9, 9, 11, 9,/ 9, . . . Na de streep is voor het eerst het aantal 9's groter dan het aantal 11'en. De 2e tot en met 7e patiënt hebben dus een wachttijd die 1 minuut groter is. Vanaf de 8e patiënt komen de patiënten 1 minuut vroeger en worden ze 1 minuut vroeger geholpen. De dokter wint dus 1 minuut en 6 patiënten hebben een 1 minuut grotere wachttijd.
c De volgorde van de tijden is bijv. 11, 11, 9, 11, 9, 9, 11, 11, 9, 9, 11, 9. Op geen enkel tijdstip is het aantal 9's groter dan het aantal 11'en. De dokter wint geen tijd. Van 11 patiënten wordt de wachttijd 1 minuut groter.
We beginnen met het geval c. De grafiek gaat van (0,0) naar (1,0). Daarna van (1,0) naar (6,6)

zonder een punt gemeen te hebben met de lijn $y = x + 1$.
Het aantal grafieken dat van $(1, 0)$ naar $(6, 6)$ gaat zonder een punt gemeen te hebben met de lijn $y = x + 1$, is gelijk aan het totaal aantal grafieken van $(1, 0)$ naar $(6, 6)$ verminderd met het aantal dat wel een punt met deze lijn gemeen heeft.
Dit laatste aantal is gelijk aan het aantal grafieken van $(-1, 2)$ naar $(6, 6)$. (Het punt $(-1, 2)$ is verkregen door $(1, 0)$ te spiegelen in de lijn $y = x + 1$.)
Het aantal grafieken van $(-1, 2)$ naar $(6, 6)$ is $\binom{11}{4}$.
Het aantal grafieken van $(1, 0)$ naar $(6, 6)$ dat de lijn $y = x + 1$ niet snijdt, is dus $\binom{11}{5} - \binom{11}{4}$.
Dit is dus het aantal gevallen waarin de dokter geen tijdwinst boekt.
Het aantal gevallen waarin hij wel tijdwinst boekt, is dan $\binom{12}{6} - \binom{11}{5} + \binom{11}{4} = 792$.
De gemiddelde tijdwinst van de dokter krijgen we door deze uitkomst te delen door $\binom{12}{6}$. Deze bedraagt dus $\frac{792}{924} = 0{,}85$ minuut.
Nu de wachttijd van de patiënten.
In geval c is de wachttijdvermeerdering voor alle gevallen samen $11(\binom{11}{5} - \binom{11}{4}) = 1452$ minuten.
Geval b. We beschouwen eerst het geval waarin de streep na de 10e patiënt staat. De grafiek loopt dan van $(0, 0)$ naar $(5, 5)$ en heeft daarbij geen punt gemeen met de lijn $y = x + 1$. Daarna van $(5, 5)$ naar $(5, 6)$ en ten slotte van $(5, 6)$ naar $(6, 6)$.
Het aantal grafieken van $(0, 0)$ naar $(5, 5)$ dat met de lijn $y = x + 1$ geen punt gemeen heeft, is $\binom{9}{4} - \binom{9}{3}$. Dit geeft een wachttijdvermeerdering voor
10 patiënten in $\binom{9}{4} - \binom{9}{3}$ gevallen.
Nu de streep achter de 8e patiënt. De grafiek gaat dan van $(0, 0)$ naar $(4, 4)$ zonder met de lijn $y = x + 1$ een punt gemeen te hebben. Daarna van $(4, 4)$ naar $(4, 5)$ en vervolgens van $(4, 5)$ naar $(6, 6)$.
Het aantal grafieken van $(0, 0)$ naar $(4, 4)$ dat met de lijn $y = x + 1$ geen punt gemeen heeft, is $\binom{7}{3} - \binom{7}{2}$.
Het aantal grafieken van $(4, 5)$ naar $(6, 6)$ bedraagt $\binom{3}{1}$. Zodat we een wachttijdvermeerdering krijgen voor
8 patiënten in $(\binom{7}{3} - \binom{7}{3})\binom{3}{1}$ gevallen.
Evenzo krijgen we een wachttijdvermeerdering voor
6 patiënten in $(\binom{5}{2} - \binom{5}{1})\binom{5}{2}$ gevallen
4 patiënten in $(\binom{3}{1} - \binom{3}{0})\binom{7}{3}$ gevallen
2 patiënten in $1 \cdot \binom{9}{4}$ gevallen.
In totaal geeft dit een vermeerdering van $420 + 336 + 300 + 280 + 252 = 1588$ minuten.
Geval b en c samen geeft een totale vermeerdering van $1588 + 1452 = 3040$ minuten.
Dat is per spreekuur gemiddeld $\frac{3040}{924} = 3{,}29$ minuut.
En per patiënt $\frac{3{,}29}{12} = 0{,}27$ minuut.
De lezer mag hieruit de voor hem passende sociale conclusies trekken. Natuurlijk na schaalvergroting.

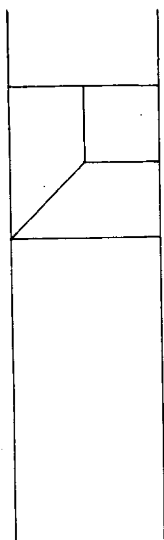
430. In een vlak is een gelijkzijdige driehoek ABC gegeven. Gevraagd de verzameling van de punten P in dat vlak waarvoor PA, PB en PC lengten van zijden van een driehoek zijn.
We beperken ons eerst tot de punten waarvoor $PA \geqslant PB$ en $PA \geqslant PC$, dus tot de punten in I.
We vragen naar de verzameling van de punten in I waarvoor $PA < PB + PC$.

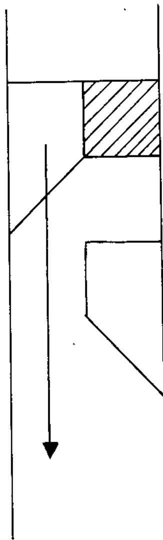


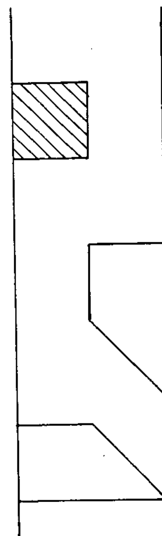
Volgens de stelling van Ptolemaeus en zijn omgekeerde is
$PA = PB + PC \Leftrightarrow PA \cdot BC = PB \cdot AC + PC \cdot AB \Leftrightarrow P$ ligt op boog BC.

Er is een punt in I binnen de cirkel waarvoor
$PA < PB + PC$
en een punt in I buiten de cirkel waarvoor
$PA < PB + PC$
$PA - (PB + PC)$ is een continue functie van P. De verzameling van de punten in I waarvoor
$PA < PB + PC$ is dus I op boog BC na.
De verzameling van de punten die aan de vraag voldoen, is dan het vlak op de cirkel na.
Van Lint stelt in zijn stelling dezelfde vraag, maar voor een gelijkbenige driehoek ABC.

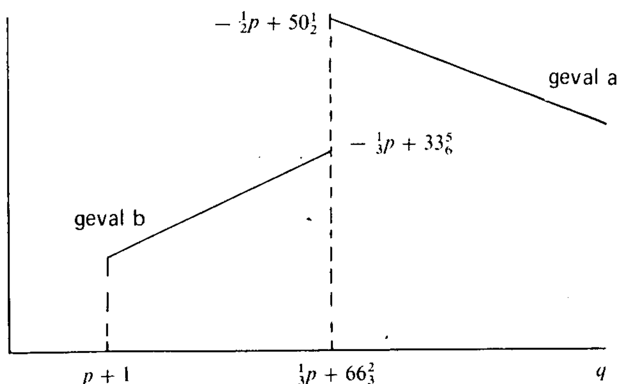
431. Een tussen twee ijzeren linialen ingeklemd houten vierkant moet een kwartslag gedraaid worden. We zagen het in drie stukken (figuur 1). In figuur 2 en 3 ziet u, wat er achtereenvolgens gebeurt. Tot slot worden dan de drie stukken in elkaar geschoven.


Fig. 1


Fig. 2


Fig. 3

Bij no. 421. J. N. Schilder uit Edam maakt me er opmerkzaam op, dat ik in de oplossing op de bovenste regel van blz. 75 ontspoord ben. Deze moet luiden:
voor B: $\frac{1}{2}(q - \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}q + 1) + 100 - q = -\frac{1}{4}p - \frac{3}{4}q + 100\frac{1}{2}$
Er komt dan slechts één grafiek, namelijk (voor $p \leqq 25$):



q wordt dan zo dicht mogelijk rechts van $\frac{1}{3}p + 66\frac{2}{3}$ gekozen. Verder $p = 25$, want voor dalende p neemt het aantal winstmogelijkheden voor A af.
Zodat de uitkomst wordt:
aantal winstmogelijkheden voor A $38\frac{1}{4}$, voor B $37\frac{1}{4}$, voor C $25\frac{1}{2}$.

Boekbesprekingen

A. Fetzer, H. Fränkel, *Mathematik*, Hermann Schroedel Verlag KG, Hannover.

Dit 'Lehrbuch für Fachhochschulen' bestaat uit drie delen: deel 1, 393 blz., DM 41,80; deel 2, 376 blz., DM 41,80; deel 3, 428 blz., DM 43,–. Overzicht van het behandelde:

deel 1: verzamelingen, reële getallen, functies als grondbegrippen voor al wat volgt; matrices, determinanten en vectoren, kunnen onafhankelijk van de analyse bestudeerd worden evenals het hoofdstuk over de complexe getallen; rijen en limieten, limieten van functies, continuïteit, logaritmische en exponentiële functies, vormen een directe voorbereiding op

deel 2: de differentiaalrekening waarbij de bekende weg bewandeld wordt: raaklijn in een punt aan een kromme, vervolgens de rekenregels en de middelwaardestelling; de integraalrekening, uitgaande van oppervlakteberekeningen tot het berekenen van bepaalde integralen via primitieve functies; in de toepassingen worden vele voorbeelden uit de meetkunde en de natuurkunde gekozen; tot slot nog enkele numerieke methoden.

deel 3: rijen en reeksen met speciale aandacht voor machtreeksen en Fourier-reeksen, convergentiecriteria, termsgewijs differentiëren en integreren; functies van meer variabelen, w.o. partieel differentiëren, extrema, dubbelintegralen, lijnintegralen etc.; complexe functies; gewone differentiaalvergelijkingen.

Het werk richt zich speciaal tot de studenten van technische hogescholen, hetgeen duidelijk terug te vinden is in de behandelingswijze van de onderscheiden onderwerpen. De auteurs gaan m.i. van het terechte standpunt uit dat de wiskunde voor deze categorie studenten hulpwetenschap is.
Het gaat uiteindelijk om de ingenieur die in de realiteit zijn probleemgebied vindt. Hiervan zal hij zich een, doorgaans meetkundig, beeld vormen. De auteurs gaan bij hun uitleg dan ook veelal uit van het 'plaatje',. Daarna wordt zo exact mogelijk verder geredeneerd. Het is duidelijk dat hierdoor geen zuiver theoretisch bouwwerk ontstaat. Dat is ook niet de bedoeling: de studenten leren de wiskunde gebruiken. En dat gaat op een grondige wijze. De schrijvers lichten vele bewijzen toe aan talrijke voorbeelden en tegenvoorbeelden, speciaal om de voorwaarden waaronder een stelling gebruikt mag worden duidelijk te maken. Verder kan de stof verwerkt worden met behulp van de talrijke, door de boeken heen opgenomen, vraagstukken waarvan oplossingen eveneens zijn weergegeven. Bijzonder goed uitgevoerde boeken, zeer verzorgd, ook w.b. de technische vormgeving. De prijs alleszins waard.

W. Kleijne

Herbert Meschkowski, *Mathematik und Realität*, Bibliographisches Institut Mannheim/Wien/Zürich, 183 blz., DM 32,–.

Voor ons ligt een buitengewoon aardig boekje betreffende de grondslagen van ons vak. Het is samengesteld uit 'Vorträge und Aufsätze' die de auteur in de loop der jaren heeft gehouden en gemaakt. Het boekje dat vrij gemakkelijk en vlot te lezen is geeft een kaleidoscoop aan onderwerpen die alle handelen over de verhouding van de wiskunde tot de werkelijkheid.
Velen zullen diverse artikelen kennen uit andere uitgaven. Het lijkt mij toch een goede gedachte geweest te zijn deze stukken te bundelen tot het onderhavige boekje. Het lijkt het beste de titels van de hoofdstukken hier te geven opdat men zich een beeld van de inhoud kan vormen:
Paradoxie und Antinomie; Goethes Stellung zur Mathematik; Forderungen an ein Axiomensystem; Aus den Briefbüchern Georg Cantors; Die Bedeutung Georg Cantors für die moderne Mathematik; Die Stellung der Mathematik in unserer Gesellschaft; Platonismus im 20. Jahrhundert; Die Kunst der Vorlesung; Mathematik und Realität bei Georg Cantor; Leibniz und die chinesische Philosophie; Die Beiträge von Bolzano, Cantor und Dedekind zur Begründung der

Mengenlehre; Carl Friedrich Gauss und die Grundlagen der Mathematik; 100 Jahre 'Ignorabimus'; Die mathematische Denkweise in der Kultur der Gegenwart; Die Zahl als Archetypus.
Ik citeer de woorden achter op het boekje:
Diese Sammlung von Vorträgen und Aufsätze aus den beiden letzten Jahrzehnten macht deutlich, wie tiefgreifend sich unsere Einsichten über Weite und Grenze menschlichen Erkennens durch gründliche Beschäftigung mit der Mathematik verändert haben. Für Mathematiker, Naturwissenschaftler und naturwissenschaftlich interessierte Philosophen. U begrijpt dat ik het boekje met buitengewoon veel genoegen en interesse heb gelezen. Ik kan het ieder uit de bovengenoemde categorieën van harte aanbevelen.

W. Kleijne.

C. van de Wijgaart, *Inleiding programmeren in PASCAL*, Academic Service, Den Haag (2e gewijzigde druk), 114 blz., *f* 16,50.

De eerste druk van 1977 van dit boek is al in Euclides besproken: 54e jaargang, no. 2, oktober 1978, p. 70-71.
In de tweede druk zijn enkele correcties aangebracht en is een hoofdstuk over de ontwikkeling van een programma toegevoegd. Ondanks het feit dat het aantal anglicismen eerder werd vergroot dan verkleind (er is bijv. nu sprake van pointers in plaats van wijzers) en de weinig academisch aandoende stijl, blijft het boek een plezierige inleiding in PASCAL.

A. Ollongren

Hermann Athen, Heinz Griesel, *Mathematik Heute, Grundkurs Stochastik*, Schroedel Verlag KG, Hannover/Schöningh, Paderborn, 128 blz., DM 11,40.

Dit boek is een inleiding in de kansberekening en statistiek, wat leerstof betreft vergelijkbaar met de kansrekening en statistiek van ons wiskunde-een-programma. De inhoud is als volgt: voorwoord, 1. beschrijvende statistiek, 2. kansrekening, 3. simulatie van toevalsexperimenten, 4. combinatoriek en kansrekening, 5. kansverdelingen, 6. toetsen van hypothesen, tabellen, register en formuleverzameling.
Didactisch gezien is het een heel aardig geslaagd boek. De stof wordt consequent in de vorm van opdrachten met oplossingen aangeboden op de middelste twee kolommen van de bladzijden. Volgens de auteurs zijn deze opdrachten bedoeld als instapproblemen waar klassikaal aan gewerkt kan worden. Elke paragraaf wordt afgesloten met een explicitering van wat er via de instapproblemen geleerd moet zijn. Mij dunkt dat deze expliciteringen in een aantal gevallen te vroeg komen; soms is er maar één voorbeeld aan voorafgegaan. Bovendien zijn deze expliciteringen erg formeel. Het geleerde kan steeds worden toegepast in een zeer groot aantal rijke en gevariëerde opgaven uit allerlei toepassingsgebieden. Deze opgaven staan op grijze ondergrond op de buitenste kolommen van de bladzijden. Zowel binnen de theorie als de toepassingen zijn via tekentjes extra stof van gelijke en van grotere moeilijkheidsgraad opgenomen.
Methodisch zijn de volgende opmerkingen te maken. Bij de kansrekening wordt steeds het verband met de beschrijvende statistiek gelegd, ook bij de begrippen verwachting en variantie. Het kansbegrip lijkt mij hierdoor voor de leerlingen konkreet te blijven. De begrippen afhankelijkheid en onafhankelijkheid ontbreken, maar dat is gezien de poging het boek echt inleidend te houden geen bezwaar. Bij de kansverdelingen wordt alleen de binomiale kansverdeling systematisch behandeld. Het toetsen is beperkt tot de tweezijdige binomiale toets. Wat ik een fout vind is het feit dat er steeds over één hypothese wordt gesproken terwijl dat er in feite twee zijn: de nulhypothese en de alternatieve hypothese.
Samengevat: een goed boek, dat voor alle nederlandse wiskundeleraren iets van hun gading bevat.

Bert Zwaneveld

Mededelingen

Examenbesprekingen lbo-c, mavo, havo en vwo 1981

De traditionele bijeenkomsten ter bespreking van de normen van de wiskunde-examens worden dit jaar als volgt gehouden:

voor lbo-c op *maandag 11 mei* a.s.
voor mavo-3 en lto op *dinsdag 12 mei* a.s.
voor mavo-4 op *maandag 11 mei* a.s.
voor havo op *dinsdag 12 mei* a.s.
voor wiskunde I op *donderdag 14 mei* a.s.

Doordat de examenzittingen voor havo en wiskunde I dit jaar niet op dezelfde dag plaatsvinden, waren we genoodzaakt ook de examenbesprekingen voor havo en wiskunde I op verschillende dagen te houden. Examenbesprekingen en vooral de bespreking der normen, zijn alleen zinvol als ze zo spoedig mogelijk na het examen gehouden worden.

Voor wiskunde II zal er één centrale bespreking zijn op *maandag 11 mei* a.s. om 19.00 uur in het Jaarbeurscongrescentrum te Utrecht.

De normen zijn bindend, zodat daar geen wijzigingen in kunnen worden aangebracht. Er kunnen wel afspraken gemaakt worden over een bepaalde verfijning van de normen. Bovendien zullen tijdens deze bijeenkomsten de opgaven worden besproken. De gemaakte op- en aanmerkingen worden verwerkt in een verslag dat de Commissie Vaststelling Opgaven zal worden aangeboden.

De bijeenkomsten beginnen alle om 16.00 uur en eindigen om ongeveer 18.00 uur

Bijeenkomsten ter bespreking van de normen van het open werk lbo-c (leao, lhno, llo en lmo) examens op maandag 11 mei 1981 van 16.00 tot 18.00 uur.

Plaats	*Adres van de school*	*Gespreksleider*
Breda	Lhno-school Het Groene Woud Groene Woud 2 076-65 62 50	A. Dona Prunus 6 Oisterwijk 04242-53 94 W. Ligtenberg Ursa Minor 22 Loon op Zand 04166-22 32
Drachten	Christelijke School voor Leao Splitting 17 05120-1 69 05	J. J. Acda Flevo 68 Drachten 05120-1 80 38 A. J. Tobi Kamgras 81 Leeuwarden 05100-8 12 19

Roermond	Lhno-school De Heuvelkamp Kerkeveldlaan 1 04750-2 40 41	F. Kunnen Beatrixstraat 11 Sevenum 04767-26 64 H. M. Maes Grachtstraat 33a Oirsbeek 04492-28 72
Utrecht	Mavo/Leaoschool Lunetten Kampereiland 6 030-88 35 51 vanaf C.S. bus lijn 5 tot eindpunt of station Lunetten (100 m)	J. van den Heuvel Kabof 53 Hoogland 033-80 30 54 M. Taal K. Julianastraat 12 Benthuizen 079-31 35 72

Bijeenkomsten ter bespreking van de normen van het open werk lto-c en mavo-3 examens op dinsdag 12 mei 1981 van 16.00 tot 18.00 uur

Plaats	*Adres van de school*	*Gespreksleider*
Amsterdam	Osdorper Schoolgemeenschap Hoekenes 61 020-19 83 99	E. G. Doevendans Clara Bartonstraat 14 Amsterdam 020-36 20 49
Arnhem	Technische School De Boulevard Boulevard Heuvelink 48 085-45 34 55	W. van Baarle Weberstraat 9 Castricum 02518-5 53 36 J. van de Wijk Hammarskjöldweg 35 Lochem 05730-33 20 J. Vink Dillenburg 132 Lochem 05730-31 14
Breda	K.T.S. De Blauwe Kei Van Riebeecklaan 2 076-13 93 52	A. Braat Albastdijk 48 Roosendaal 01650-3 72 42 R. Jonker Hameie 15 Teteringen 076-81 22 18
Drachten	Christelijke Technische School Splitting 63 05120-1 91 55	F. de Boer Linthorst Hohmanstr. 24 Franeker 05170-36 10 S. Kooiman Illegaliteitslaan 11 Groningen 050-25 12 89
Roermond	L.T.S. Dr. Cuypers St. Odgerusstraat 1 04750-2 29 40	W. H. J. Basten Renkenstraat 10 Sevenum 04767-24 16 O. P. D. Bolech B. Schrijenstraat 10 Sittard 04490-1 85 22

Rotterdam	Christiaan Huygensschool Benthemstraat 15 010-65 60 88	N. Narraina Laan v. Meerdervoort 's-Gravenhage 070-60 88 31 W. de Porto Schuberthof 47 Waddinxveen 01828-46 74

Examenbespreking wiskunde mavo-4 maandag 11 mei 1981 van 16.00 tot 18.00 uur.

Plaats	*Adres van de school*	*Gespreksleider*
Groningen	Menno van Coehoornschool Goeman Borgesiuslaan 161 9722 RG Groningen tel. 050-25 02 12	L. Wesselink Jan Ensinglaan 7 9744 GP Groningen tel. 050-56 65 09
Hoogezand	Dr. A. Jacobs Scholengemeenschap Nieuweweg 67 9603 BH Hoogezand tel. 05980-9 23 84	W. Visser Amalia van Solmslaan 11 9602 GM Hoogezand tel. 05980-2 03 03
Leeuwarden	Mavo 'Nylan' Princesseweg 4 8931 EG Leeuwarden tel. 05100-2 76 24	A. J. Langelaar Grietmanslaan 92 8431 CV Oosterwolde tel. 05160-25 74
Emmen	Mavo Allee Smedingeslag 1 7824 HK Emmen tel. 05910-2 34 56	H. Hendriks Wekingeslag 10 7824 JM Emmen tel. 05910-2 33 01
Zwolle	Thorbecke Scholengemeenschap Dr. Van Heesweg 1 (nabij Sofiaziekenhuis) 8025 AB Zwolle 05200-4 66 77	S. R. Zwaan Zwette 28 8032 XM Zwolle 05200-4 17 64
Hengelo	R.K. Mavo ''t Lansink' Lansinkweg 80 7553 AM Hengelo 074-91 32 97	C.T.J. Hoogsteder Prins Mauritshof 4 7061 WR Terborg 08350-2 43 37
Arnhem	Thorbecke Scholengemeenschap Thorbeckestraat 17 6828 TS Arnhem 085-42 30 28	L. Hoekstra Rondehof 40 6662 ZW Elst 08819-38 60
Schaesberg	Petrus en Paulusmavo Lotersbergweg 2 6372 HR Schaesberg 045-31 37 55	J. P. Habets Kerkstraat 29 6351 GG Bocholz 045-44 21 17
Roermond	R.K. Mavo Kap. Lindanus Roersingel 28 6041 KX Roermond 04750-1 40 54	W. Crijns Den Roover 17 5953 BM Reuver 04704-19 46

Alkmaar	Bram Daaldermavo Rubenslaan 14 1816 MB Alkmaar 072-11 34 38	R. Pijning Tesselschadestraat 7 1814 EK Alkmaar 072-11 22 70
Amstelveen	Theo Thijssenschool (bij V en D) Burg. Haspelslaan 6 1181 NB Amstelveen 020-41 21 56	A. P. J. O. Custers Pinksterbloem 59 1689 RC Zwaag
Haarlem	R.K. Mavoschool 'Jeroen' Overtonstraat 42 2024 XK Haarlem 023-25 17 49	A. A. Rommelse Hammarskjöldstraat 43 2131 VB Hoofddorp 02503-1 21 83
's-Gravenhage	Groen van Prinsterercollege Albardastraat 25 2555 XP 's-Gravenhage 070-25 62 60	W. van der Ley Nederpelstraat 254 2552 HH 's-Gravenhage 070-97 37 85
Amersfoort	Chr. Andreasmavo Ringweg Koppel 7 3813 BA Amersfoort 033-2 01 03	J. C. Vos Godivastraat 9 3813 WE Amersfoort 033-75 17 19
Utrecht	R.K. Mavo 'Overvecht' Pahud de Mortangesdreef 41 3562 AB Utrecht 030-61 69 46	P. Visser Lekdijk 13 4121 KG Everdingen 03472-15 48
Rotterdam	Chr. Mavoschool 'Het Lage Land' Kromhoutstraat 3-5 3067 AE Rotterdam 010-20 53 93	L. Bozuwa Abeelstraat 7 3329 AA Dordrecht 078-16 39 46
Roosendaal	Mavo 'De Roosenborch' Bovendonk 1 4707 ZH Roosendaal 01650-4 38 71	A. Joosen P.C. Hooftlaan 30 4707 BP Roosendaal 01650-3 56 61
Middelburg	Oranje Nassauschool voor Chr. Mavo Oranjelaan 11 4332 VA Middelburg 01180-2 52 74	A. Kamraad v. Strijenstraat 19 4371 CH Koudekerke 01185-22 31
Eindhoven	Dr. Edith Steinmavo Generaal van Merlenstraat 5 5623 GC Eindhoven 040-43 52 30	J. C. G. W. van den Berg Haakakker 26 5731 EZ Mierlo 04927-17 44
's Hertogenbosch	St. Leonardusmavo Emmaplein 19 5211 VZ 's-Hertogenbosch 073-13 56 74	F. J. Mahieu Dommeldal 12 5282 WC Boxtel 04116-7 34 68

Examenbesprekingen wiskunde havo op dinsdag 12 mei 1981 van 16.00 tot 18.00 uur

Plaats	*Adres van de school*	*Gesprekleider*
Groningen	Heymanscollege Nwe St. Jansstraat 11 9712 JM Groningen 050-12 04 30	C. H. G. Hegeman Coronastraat 62 9742 EH Groningen 050-77 54 90
Deventer	Alexander Hegius Scholengem. Het Vlier 1 7414 AR Deventer 05700-1 20 64	C. Meyboom Kolkmansweg 17 7433 CK Schalkhaar 05700-2 16 07
Amsterdam	Montessori-Lyceum Pieter de Hooghstraat 59 1071 ED Amsterdam 020-76 78 55	G. Zwaneveld Haringvlietstraat 9II 1078 JX Amsterdam 020-73 89 12
Rotterdam	St. Franciscuscollege Beukelsdijk 91 3021 AE Rotterdam 010-77 00 33	H. Ekstijn Mathenesserlaan 368b 3023 HB Rotterdam 010-76 59 26
Bergen op Zoom	Mollerlyceum Bolwerk zuid 68 4611 DW Bergen op Zoom 01640-4 15 50	B. de Groot Rode Schouw 105 4661 VG Halsteren 01641-36 01
Roermond	Bisschoppelijk College Bob. Boumansstraat 30 6042 EH Roermond 04750-2 12 41	Van Hulten Schakenberg 6 6041 PN Roermond 04750-1 61 13

Examenbesprekingen wiskunde I op donderdag 14 mei 1981

Plaats	*Adres van de school*	*Gespreksleider*
Groningen	Heymans college Nwe. St. Jansstraat 11 9712 JM Groningen 050-12 04 30	J. van Jansen Boterdiepwestzijde 5 9781 EH Bedum 05900-30 43
Deventer	Alexander Hegius Scholengem. Het Vlier 1 7414 AR Deventer 05700-1 20 64	F. W. de Bruyn Van Doetinchemstraat 5 7415 CW Deventer 05700-2 51 16
Amsterdam	Montessori-Lyceum Pieter de Hooghstraat 59 1071 ED Amsterdam 020-76 78 55	Mevr. F. Meester Waalstraat 118 1079 EX Amsterdam 020-42 52 28
Rotterdam	St. Franciscuscollege Beukelsdijk 91 3021 AE Rotterdam 010-77 00 33	B. Hillebrand Paulus Potterstraat 17 2931 CX Krimpen a/d Lek 01807-1 52 10

Bergen op Zoom	Mollerlyceum Bolwerk Zuid 68 4611 DW Bergen op Zoom 01640-4 15 50	A. L. D. van Merode Kerkstraat 8 5101 BC Dongen 01623-1 37 46
Roermond	Bisschoppelijk College Bob Boumansstraat 30 6042 EH Roermond 04750-2 12 41	J. F. Mayer Heerbaan 4[a] 6061 ED Bocholz 04742-19 49 J. H. M. Lipsch Kast. Nederhovenstraat 8 6043 JT Roermond 04750-2 62 67

Het leeromgevingsonderzoek

Wat is een succesvolle gang van zaken in wiskundelessen van tweede klassen vwo/havo? Dit is de vraag achter het z.g. Leeromgevingsonderzoek, dat in internationaal verband in het schooljaar 1981/82 zal plaatsvinden. In een vijftigtal klassen zal door neutrale observateurs de gang van zaken geregistreerd worden tijdens acht lessen verspreid over de periode van september tot april. Aan het begin en het einde zullen de leerlingen van die klassen getoetst worden op hun wiskundekennis, hun vermogen om wiskunde-problemen op te lossen e.. hun houding tegenover wiskunde. Door middel van een correlationele analyse van de vergaarde gegevens zal dan nagegaan worden, welke geobserveerde verschijnselen in de klas samenhangen met wenselijke resultaten bij de leerlingen.
De observateurs hebben tevoren een gedegen training ontvangen voor hun taak. De waarneming van de gang van zaken beperkt zich tot die variabelen die door een buitenstaande betrouwbaar kunnen worden vastgesteld. Dat zijn er niettemin vele. Om een paar voorbeelden te noemen: Hoe is de tijdsbesteding (huiswerk bespreken, uitleggen nieuwe stof, etc.)? Geeft de leraar veel of weinig beurten? Vat hij behandelde stof samen?
Een dergelijk onderzoek wordt van direkt belang geacht voor de opleiding en bijscholing van leraren. De veronderstelling die hieraan ten grondslag ligt is, dat het onderwijs verbeterd kan worden door leraren te informeren over de meest succesvolle gang van zaken bij hun collega's, of over details daarvan.
Het spreekt echter vanzelf, dat niet alle aspekten van de klassesituatie die sterk samenhangen met onderwijssucces, bruikbaar zijn om door alle leraren met succes ingevoerd te worden. De aspecten moeten nog zorgvuldig geschift en op hun geschiktheid getoetst worden. Daarom wordt nu reeds door de onderzoekers een vervolg op deze studie voorbereid. Daarin zal de meest belovende gang van zaken in de klas experimenteel onderzocht worden op zijn effectiviteit en zijn praktische toepasbaarheid.
Het leeromgevingsonderzoek wordt door een vijftiental landen uitgevoerd onder leiding van de IEA (International Association for the Evaluation of Educational Achievement). Het Nederlandse aandeel wordt verzorgd door de lerarenopleiding van de Technische Hogeschool Twente onder leiding van prof. dr. E. Warries. Een landelijke commissie waarin o.a. de inspectie avo, het ministerie van O & W, de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, het CITO en tot voor zijn 'herstrukturering' het IOWO vertegenwoordigd zijn, treedt als klankbord op.
Binnenkort zal een aantal scholen benaderd worden met het verzoek aan dit onderzoek deel te nemen. Per deelnemende leraar wordt maximaal drie uur extra tijd gevraagd o.a. voor het invullen van een vragenlijst. De leraar zal worden gevraagd zijn te observeren klas maximaal drie lesuren beschikbaar te stellen voor het beantwoorden van vragenlijsten en toetsen. De onderzoeksgegevens zullen door de onderzoekers alleen in zódanige vorm vrijgegeven worden, dat individuele leerlingen, leraren en scholen niet herkenbaar zijn.
Het is nodig, dat de samenstelling van de groep deelnemende scholen en leraren een representatieve doorsnede van de Nederlandse situatie op vwo/havo is.
De onderzoekers hopen dan ook, dat op hun verzoek tot deelname door velen positief zal worden gereageerd.
Wie meer over Het Leeromgevingsonderzoek wil weten kan een folder aanvragen bij: Drs. H. Krammer, Lerarenopleiding, afd. Toegepaste Onderwijskunde, Technische Hogeschool Twente, Postbus 217, 7500 AE Enschede.

NEDERLANDSE WISKUNDE OLYMPIADE 1981

De eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade 1981 zal plaatsvinden op *vrijdag 3 april a.s.* Er kan aan deelgenomen worden door leerlingen van de vierde en de vijfde klas van het v.w.o. en van de vierde klas van het havo.
De organisatie is gelijk aan die van de voorgaande jaren: In maart ontvangen alle scholen voor v.w.o./havo een aantal exemplaren van het opgavenblad, een correctiesleutel en een resultatenformulier. De zending zal gericht zijn aan: De wedstrijdleider van de wiskunde Olympiade.
Op scholen waar men de leerlingen gelegenheid wil geven aan de Olympiade mee te doen, moet dus een wedstrijdleider benoemd worden. Deze zorgt voor vermenigvuldiging van de opgaven, bepaalt de plaats waar op zijn school de eerste ronde gehouden zal worden, houdt daarbij toezicht en kijkt het gemaakte werk na. Voor het gemak en ook om een eenvormige beoordeling te bevorderen worden alleen uitkomsten gevraagd, geen beredeneringen en berekeningen. De wedstrijdleiders noteren de resultaten op het resultatenformulier, dat zij naar het secretariaat van de Wiskunde Olympiade opsturen.
Het secretariaat zoekt uit de resultatenformulieren een honderdtal deelnemers met de hoogste score, vraagt van hen bij de wedstrijdleiders de bladen met uitwerkingen op en nodigt hen, na controle van de blaadjes, uit om deel te nemen aan de tweede ronde, die op vrijdag 11 september in Apeldoorn gehouden zal worden. Uit de tweede ronde zullen tien prijswinnaars komen, terwijl voor acht deelnemers de mogelijkheid bestaat mee te doen aan de Internationale Wiskunde Olympiade 1982.

W. Kleijne, secretaris
Jachtlaan 108, 7313 EC Apeldoorn

Vlaamse Vereniging Wiskunde Leraars

Tweede driedaags VVWL-congres in het Provinciaal Instituut voor Cultuur en Sport Dommelhof in NEERPELT op 27, 28 en 29 juni 1981

Thema: WISKUNDEONDERWIJS: WAT? HOE?

Vrijdag 27 juni 1981	:	ontvangst vanaf 17 uur. Mits inschrijving vooraf, avondmaal om 18.
Zaterdag 27 juni 1981	:	ontbijt om 8.30
		ontvangst deelnemers op het secretariaat
10.00	:	opening door de voorzitter Frank LaForce, toespraken en toelichting van de agenda
11.00		Prof. dr. van der Blijk (Rijksuniversiteit Utrecht), 'WISKUNDE VOOR DAGELIJKS GEBRUIK'
12.30	:	lunch
14.15	:	eerste namiddagseminarie
15.30	:	koffiepauze
16.00	:	tweede namiddagseminarie
18.00	:	avondmaal en ontspanning
Zondag 28 juni 1981	:	ontbijt om 8.30
9.00	:	Prof. dr. George Papy (Université Libre de Bruxelles), 'Comment?'
10.15	:	koffiepauze
10.45	:	Ann en Omer Mogensen (Rijksnormaalschool Gent), Het vernieuwd wiskundeonderwijs in de Basisschool en de impact daarvan op het S.O.
12.00	:	lunch

	14.15	: namiddagseminarie
	15.30	: koffiepauze
	16.00	: 'Poster sessions'
	18.00	: avondmaal
	20.00	: filmvertoning
	21.00	: ontspanning
Maandag 29 juni 1981		: ontbijt om 8.30
	9.00	: Prof. dr. P. Hilton (Case Western Reverse University Ohio), Contents and goals of mathematical education
	10.15	: koffiepauze
	10.45	: Rik Verhulst (Katholieke Normaalschool Pius X Antwerpen), Hoe is hoe in de wiskunde?
	12.00	: sluiting
	14.30	: vertrek van de congressisten

De namiddagseminaries
Bij elk van de drie sessies is er een ruime keuze en sommige seminaries zullen meermaals gegeven worden. We vermelden alvast:
Toon Huybrechts: Moet wiskunde per sé een boe-vak zijn?
Chris Laenen: Aspecten in verband met motivatie
Jos de Schrijver: Reële vierkantswortels
René Laumen: Achter de coulissen van de zoekersrubriek
Hilde van Buggenhout: titel nog te bepalen
Marcel Dams en Jan Vermeylen: titel nog te bepalen

Poster sessions
Hier wordt aan alle collega's de kans geboden in kleine groepen te spreken over problemen die zij in hun lessen tegen komen, hun oplossing of aanpak te vertellen, bepaalde standpunten te verdedigen, enz.

Ontspanning
Er is volop gelegenheid tot wandelen in het prachtige domein. Tennis, ping-pong, volleyball is mogelijk: afspreken met de sportafgevaardigde Jos Jacobs ter plaatse. (uitrusting meebrengen + sportkledij). Verder is een bar voorzien met aangepaste muziek voor een gezellig babbeltje en een dansje.

Meer inlichtingen en inschrijvingsformulier in Wiskunde & Onderwijs 25

of schrijven naar:
Mevrouw G. Simons, secretaresse VVWL
Torenblokstraat 11, bus 4
2610 Wilrijk

Het bestuur van de NVvW wekt haar leden op dit interessante congres bij te wonen. Voor de contacten met de Vlaamse leraren is het erg stimulerend als een belangrijke delegatie uit Nederland aanwezig is.

Oproep

Leraar wis- en natuurkunde die binnenkort in het kader van de ontwikkelingssamenwerking les gaat geven op een middelbare school in Mozambique, zoekt overtollige schoolboeken om mee te kunnen nemen. Dáár zijn zo goed als geen leermiddelen aanwezig.
Reakties: J. F. M. Wisbrun, Papengracht 17a, 2311 TV Leiden, telefoon 071-142010.

INHOUD:

ADRESSEN VAN DE AUTEURS:

H. Broekman, Frans Halsstraat 27, 3583 BL Utrecht.

G. Bulthuis, Theemsdreef 436, 3562 ES Utrecht.

S.P. van 't Riet, Vordensebeek 88, 8033 DG Zwolle.

P.G.J. Vredenduin, Dillenburg 148, 6865 HN Doorwerth.